Wiederholung

L, R - Algebra

$$A_L \rho = A\rho \quad , A_R \rho = \rho A$$

+, - Algebra

$$O_- = O_L - O_R$$

$$O_+ = \frac{1}{2}(O_L + O_R)$$

II.4 Zeitentwicklung, Bilder der Quantenmechanik und Propagator

Unterabschnitte

a) Zeitentwicklung im Schrödinger Bild
b) Zeitentwicklung im Wechselwirkungs Bild
c) Propagationsoperator

a) Zeitentwicklung im Schrödinger bild

Zeitentwicklung im S - Bild

$$\| \partial_t \rho = -\frac{i}{\hbar} H_-(t) \rho$$

Suche Zeitentwicklungsoperator

$$\Downarrow \quad \rho(t) = U_{\underline{L}}(t,t_0)\rho(t_0) \Rightarrow \partial_t U_{\underline{L}}(t,t_0)\rho(t_0) = -\frac{i}{\hbar} H_-(t) U_{\underline{L}}(t,t_0)\rho(t_0)$$

Integration

$$U_{\underline{L}}(t,t_0)\rho(t_0) = \rho(t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \left(-\frac{i}{\hbar}\right) H_-(\tau)\, U_{\underline{L}}(\tau,t_0)\,\rho(t_0) + \rho(t_0)$$

$$U_{\underline{L}}(t,t_0) = \left(1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{t_0}^{t} H_-(\tau)\, U_{\underline{L}}(\tau,t_0)\, d\tau\right)$$

$\Downarrow$ iterieren

$$U_{\underline{L}}(t,t_0) = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{t_0}^{t} H_-(\tau)\, d\tau + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1\, H_-(\tau_2) H_-(\tau_1)\, U_L(\tau_2,t_0)$$

<u>Iteration führt auf (von Neumann Reihe)</u>

$$U_{\underline{L}}(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,t_0)$$

$$U_n(t,t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} d\tau_n \cdots \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1\, \underline{H_-(\tau_n) \cdots H_-(\tau_1)}$$

Falls $t > t_0$

Hier sind die Zeiten geordnet, d.h. $(\tau_n > \tau_{n-1} > \dots > \tau_2 > \tau_1)$

(Bei $t < t_0$ genau andersherum)

<u>Zeitordnungsoperatoren</u>

$T_{\leftarrow}$, $T_{\rightarrow}$, wirken auf Operatoren bzw. Superoperatoren

$$T_{\leftarrow}\, A(t_1)\, B(t_2) = \begin{cases} A(t_1)\, B(t_2) & t_1 \geq t_2 \\ B(t_2)\, A(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases}$$

Wenn wir bei n- Operatoren

$$A(\tau_n)\, A(\tau_{n-1}) \dots A(\tau_1)$$

$$\tau_n > \dots > \dots > \tau_1$$

so stellt

$$T_{\leftarrow}\, A(\tau_n)\, A(\tau_{n-1}) \dots A(\tau_1)$$

~~A~~ die Zeitordnung sicher, wir dürfen Operatoren A beliebig vertauschen.

Das heißt

$$U_n(t, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \underset{t > \tau_n > \dots > \tau_1 > t_0}{\int d\tau_n \dots \int d\tau_1}\, T_{\leftarrow} \prod_{i=1}^{n} H_-(\tau_i)$$

$T_{\leftarrow}$ ordnet H_- es spielt keine Rolle ob τ_i geordnet sind

<u>Bemerkung</u> im Falle $t < t_0$ steht hier $T_{\rightarrow}$!

$$U_n(t, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \underset{t > \tau_n > \dots \tau_1 > t_0}{\int d\tau_n \dots \int d\tau_1}\, T_{\leftarrow} \sum_{\substack{\text{jede Permutation} \\ \{\tau_{k_1} \dots \tau_{k_n}\} \\ \text{aus } \{1, \dots, n\}}} \prod_{i=1}^{n} H_-(\tau_{k_i})$$

$$= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{\text{jede Permutation}}}_{\dots\dots} \underbrace{\int d\tau_n \dots \int d\tau_1}_{t > \tau_n > \dots > \tau_1 > t_0}\, T_{\leftarrow} \prod_{i=1}^{n} H_-(\tau_{k_i})$$

$$= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} d\tau_n \cdots \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \, T_{\leftarrow} \prod_{i=1}^{n} H_-(\tau_i)$$

$$= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} T_{\leftarrow} \Big(\underbrace{\prod_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} d\tau_i \, H_-(\tau_i)}_{\substack{\prod_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} d\tau \, H_-(\tau) \\ \left(\int_{t_0}^{t} d\tau \, H_-(\tau)\right)^n}} \Big)$$

$$= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n T_{\leftarrow} \frac{\left(\int_{t_0}^{t} d\tau \, H_-(\tau)\right)^n}{n!}$$

Also

$$U_{\leftarrow}(t,t_0) = 1 + T_{\leftarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\int_{t_0}^{t} d\tau \, H_-(\tau)\right)^n \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n}{n!}$$

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} d\tau \, H_-(\tau)\right)$$

mit $t > t_1 > t_0$

z.B.

$$\underline{U_{\leftarrow}(t,t_1) \, U_{\leftarrow}(t_1,t_0)} = \left(T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t} d\tau \, H_-(\tau)\right)\right) \left(T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} d\tau \, H_-(\tau)\right)\right)$$

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t} d\tau \, H_-(\tau)\right) \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} d\tau \, H_-(\tau)\right)$$

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t} d\tau \, H_-(\tau) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} d\tau \, H_-(\tau)\right)$$

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} d\tau \, H_-(\tau)\right) = \underline{U_{\leftarrow}(t,t_0)}$$

<u>Inverse Zeitentwicklungsoperator</u>

$$U_{\leftarrow}(t_0,t) = T_{\rightarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t}^{t_0} d\tau \, H_-(\tau)\right) = T_{\rightarrow} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} d\tau \, H_-(\tau)\right)$$

$$\parallel$$

$U_{\underline{L}}^{+}(t,t_0)$

$$U_{\underline{L}}^{+}(t,t_0)\, U_{\underline{L}}(t,t_0) = \mathrm{Id}$$

<u>Ziel</u> Zeitentwicklung im Hilbertraum:

Hilfe von +- Algebra!

$$U_{\underline{L}}(t,t_0)\,\varrho = T_{\leftarrow} \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, \underbrace{H_-(\tau)}_{=\, H_L(\tau) - H_R(\tau)}\Big)\,\varrho$$

$$= T_{\leftarrow} \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, \big(H_L(\tau) - H_R(\tau)\big)\Big)\,\varrho$$

ww mit Rechts gibt negativen Vorzeichen!

$$= T_{\leftarrow} \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, H_L(\tau)\Big) \exp\Big(+\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, H_R(\tau)\Big)$$

Operatoren mit L und R vertauschen

$$= \underbrace{\Big(T_{\leftarrow} \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, H_L(\tau)\Big)\Big)}_{\text{Zeitliche Entwicklung Links}} \underbrace{\Big(T_{\leftarrow} \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, H_R(\tau)\Big)\Big)}_{\text{Zeitliche Entwicklung Rechts}}\,\varrho$$

$$= \underbrace{T_{\leftarrow} \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, H(\tau)\Big)\,\varrho\, T_{\rightarrow} \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, H(\tau)\Big)}_{U(t,t_0)\,\varrho(t_0)\,U^{+}(t,t_0)}$$

im Hilbertraum

Aus einem Zeitentwicklungsoperator im Liouvilleraum werden zwei im Hilbertraum.

<u>Hilbertraum</u>

$$U(t,t_0) = T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, H(\tau)\right) \quad U^{+}(t,t_0) = T_{\rightarrow} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, H(\tau)\right)$$

Das war Schrödingerbild, es folgt:

b) Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild

Im WW-Bild H Operator in zwei Teile spalten

$$H = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ungestörtes} \\ \text{System} \\ \text{zeitunabhängig}}}{H_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zeitabhängige Störung}}}{H_1(t)}$$

Versuch Zeitabhängigkeit aufzuteilen

freie Teil H_0 wirkt auf die Observablen (Operatoren)

und H_1 wirkt auf die Zustände

Zugehörige Zeitentwicklungsoperatoren

$$U_{0,L}(t,t_0) = T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, \underbrace{H_{0,-}(\tau)}_{H_{0,-}}\right) \rho = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_{0,-}(t-t_0)\right)$$

$$\rho(t) = U_L(t,t_0)\,\rho(t_0)$$

Wir postulieren

$$\rho_0(t_0) = \rho(t_0)$$

$$\rho_0(t) = U_{L,0}(t,t')\,\rho_0(t')$$

$$\rho_0(t) = U_{L,0}(t_0,t)\,\rho(t)$$

Entfernt Zeitabhängigkeit von H_0

$$\rho_D(t) = U_{\underline{L},0}(t_0,t)\rho(t) = U^{+}_{\underline{L},0}(t,t_0)\, U_{\underline{L}}(t,t')\rho(t')$$

$$= \underbrace{U^{+}_{\underline{L},0}(t,t_0)\, U_{\underline{L}}(t,t')\, U^{-1}_{\underline{L},0}(t_0,t')}_{U_{\underline{L},D}(t,t')}\rho_D(t')$$

$$U_{\underline{L},D}(t,t') = U^{+}_{\underline{L},0}(t,t_0)\, U_{\underline{L}}(t,t')\, U_{\underline{L},0}(t',t_0)$$

Zeitentwicklung von $\rho_D(t)$

$$\partial_t \rho_D(t) = U^{+}_{L,0}(t,t_0)\Big(\underbrace{\frac{i}{\hbar} H_{0,-} - \frac{i}{\hbar} H_{,-}(t)}_{-\frac{i}{\hbar} H_{1,-}(t)}\Big) U_L(t,t')\, U_{L,0}(t',t_0)\rho(t')$$

$$= \underbrace{U^{+}_{L,0}(t,t_0)\left(-\frac{i}{\hbar} H_{1,-}(t)\right) U_{L,0}(t,t_0)}_{=:\, -\frac{i}{\hbar} H^{D}_{1,-}(t)}\, \underbrace{U^{+}_{L,0}(t,t_0)\, U_L(t,t')\, U_{L,0}(t',t_0)\,\rho(t')}_{\rho_D(t)}$$

$$\boxed{= -\frac{i}{\hbar} H^{D}_{1,-}(t)\,\rho_D(t)}$$

$$\| \; \partial_t \rho_D(t) = -\frac{i}{\hbar} H^{D}_{1,-}(t)\,\rho_D \; \|$$

$$\Longrightarrow \; \| \; U_{\underline{L},D}(t,t_0) = T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, H^{D}_{1,-}(\tau)\right) \; \|$$

c) Was ist ein Propagator? Und unser erstes Diagramm

Propagator $\leftrightarrow$ Zeitentwicklungsoperator

Diagrammatische Methode

$$H = H_0 + H_1(t) \leftarrow \text{Störung}$$

↑ Diagramme in der Ordnung der Störung aufgestellt!

Im folgenden nur noch WW Bild

$U_{L,D}(t,t_0)$ hat verschiedene Darstellungen

$$U_{L,D}(t,t_0) = T_\leftarrow \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau \, H_{1,-}^{D}(\tau)\right)$$

$$= T_\leftarrow \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau \, U_{0L}^{\dagger}(\tau,t_0)\, H_{1,-}(\tau)\, U_{0L}(\tau,t_0)\right)$$

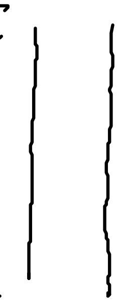
$$U_{0L}(\tau,t_0) = T_\leftarrow \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau \, H_{0,-}(\cancel{\tau})\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0\right)$$

$U_{0L}(\tau,t_0)$ beschreibt Propagation des ungestörten Systems im Liouvilleraum

$$U_{0,L}(\tau,t_0) \hat{=}$$

τ

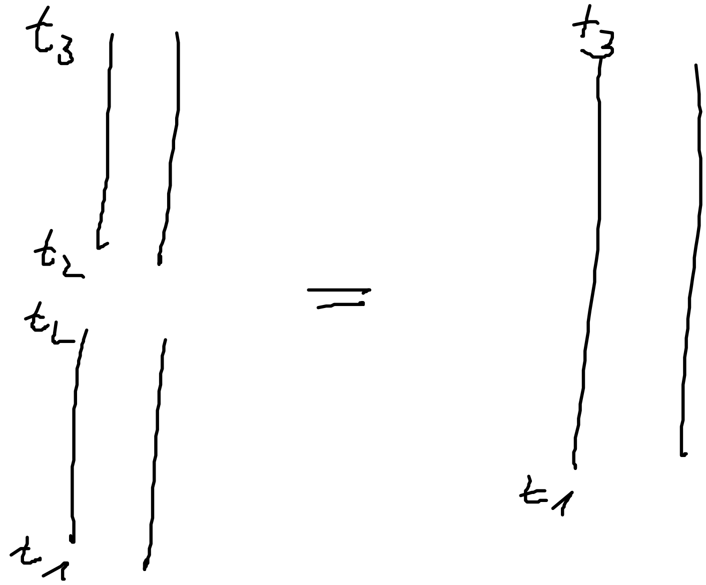


t_0

Jeder Strich symbolisiert ungestörte Propagation der rechten und linken Seite der Dichtematrix

Erste Rechenregel für Diagramme

$$U_{L,0}(t_3,t_2)\,U_{L,0}(t_2,t_1) = U_{L,0}(t_3,t_1)$$


t_3
t_2
t_2
t_1
=
t_3
t_1