

Orga: nächste VL 9⁰⁰ - 10⁰⁰ !

2. Komplexe Zahlen und Fourierreihen

2.1 Komplexen Zahlen

• Motivation:

rat. Zahlen \mathbb{Q} \rightarrow reellen Zahlen \mathbb{R} \rightarrow komplexen Zahlen \mathbb{C}

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

DGL: $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t)$ Ansatz: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 = -\omega_0^2 \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm \sqrt{-1} \omega_0$$

• Definition: i - imaginäre Einheit

$$i := \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1$$

Komplexe Zahlen auffassen als Überlagerung
aus reeller Zahl und imag. Zahl i .

$$\mathbb{C} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Real-
teil

imaginär
teil

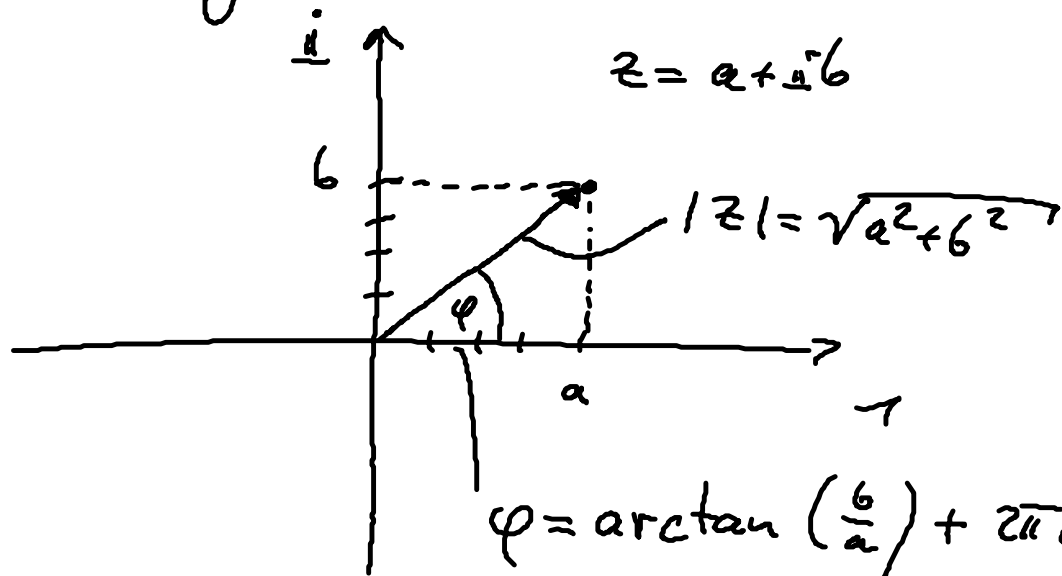
$$(a, b \in \mathbb{R})$$

$$z = 1a + i b$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Basisvektor
 "Proj. in reelle Zahl"

$\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ Basisvektor
 orthogonal auf 1

• Darstellung:



(a) kart. a, b

(b) polar Koord.

Notation:

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(a + ib) = a$$

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(a + ib) = b$$

$$\begin{aligned}
 z = a + ib &= |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi \\
 &= |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\
 &= |z| e^{i\varphi}
 \end{aligned}$$

• Rechenregeln:

(a) komplexe Exp. fkt: $e^{\pm i\varphi} \times$ (Lsg. Oszill.)

$$e^{ix} = \sum_n \frac{1}{n!} (ix)^n \quad \text{aufteilen gerade / ungerade Potenzen}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin(x) \quad \text{Euler Formel}$$

(6) Zusammenhang zw. trig. und exp. Fkt

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

ÜB $\cos(ix) = \cosh(x), \quad -i \sin(ix) = \sinh(x)$

(c) Additionstheoreme

$$e^{i(x_1+x_2)} = \cos(x_1+x_2) + i \sin(x_1+x_2)$$

$$e^{ix_1} e^{ix_2} = \dots \quad \text{Übung}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \cos(x_1+x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 \\ \sin(x_1+x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 \end{aligned}$$

(d) Addition

$$z_1 \pm z_2 = a + ib \pm (c + id) = (a \pm c) \pm i(b \pm d)$$

$$(e) z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac - bd$$

$$+ \underline{i} (ad + cb)$$

(f) komplexe Konjugation (Spiegeln an reeller Achse)

$$z^* = (a + \underline{i}b)^* := a - \underline{i}b \quad (\underline{i} \text{ durch } -\underline{i})$$

Bsp.: $\underline{i}^* = -\underline{i} \quad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* z_2^*$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \quad (z^*)^* = z$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} (z + z^*) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2\underline{i}} (z - z^*)$$

(g) Betrag

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{(a + \underline{i}b)(a - \underline{i}b)} = \sqrt{a^2 - \underline{i}^2 b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2} \end{aligned}$$

(h) Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + \underline{i}b}{c + \underline{i}d} = \frac{(a + \underline{i}b)(c - \underline{i}d)}{(c + \underline{i}d)(c - \underline{i}d)} = \frac{ac + bd + \underline{i}(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

$$z = \frac{1}{\underline{i}\omega - \gamma} \longrightarrow \operatorname{Re} z = -\frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \quad \operatorname{Im} z = -\frac{\omega}{\omega^2 + \gamma^2}$$

(i) Rechnen in Polar darstellung

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{\underline{i}\varphi_1}}{|z_2| e^{\underline{i}\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{\underline{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Potenzieren

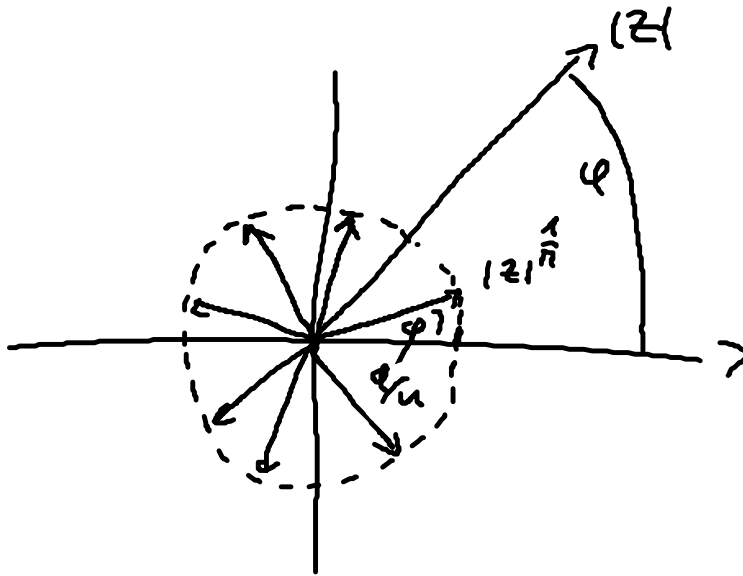
$$z^u = (|z| e^{i(\varphi + 2\pi k)})^u = |z|^u e^{i(u\varphi + 2\pi uk)}$$

Radizieren

$$\sqrt[u]{z} = (|z| e^{i(\varphi + 2\pi k)})^{\frac{1}{u}} = |z|^{\frac{1}{u}} e^{i(\frac{\varphi}{u} + 2\pi \frac{k}{u})}$$

→ $\sqrt{\quad}$ ist mehrdeutig

u Lsg. um $\frac{2\pi}{u}$ verschieden
bilden u-Ecke
auf Kreis $|z|^{\frac{1}{u}}$



2.2 Funktionen als Elemente eines Vektorraums

• f als Linearkomb. von Basisfkt. u_n :

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^N c_n u_n(t)$$

→ komplizierte Fkt durch Angabe v. diskreten Parametern c_n charakterisieren kann.

→ einfacher c_n bestimmen

• Bsp.: $f \in C^1([a, b])$ $f(x) \approx \sum_{n=1}^N c_n x^n$

$$\rightarrow u_n(x) = x^{u_n} \quad N \rightarrow \infty \text{ bel. genau}$$

$$\text{oder auch } u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(ux)$$

• Skalarprod: $u_n, u_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$(u_n, u_m) = \langle u_n | u_m \rangle := \int_a^b p(t) u_n^*(t) u_m(t) dt$$

↑
bel. Gewicht, unabh. u, m
und nicht-neg.

→ erfüllt alle Anforderungen an Skalarprod. (uB)

Damit u_n eine Basis darstellen, muss gelten:

(a) Orthogonalität

$$\langle u_i | u_j \rangle = \int_a^b u_i^*(t) u_j(t) dt = \alpha \delta_{ij}$$

$$\text{Kronecker-delta: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

(b) Normierung

$$\tilde{u}_i := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} u_i \rightarrow \langle \tilde{u}_i | \tilde{u}_j \rangle = \delta_{ij}$$

(c) Vollständigkeit

$$\sum_n \tilde{u}_n^*(t) u_n(t') = \delta(t-t')$$

↖ Delta-Funktion

• Komponenten: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(t) \quad \left| \cdot u_n^*(t) \right.$

$$u_m^*(t) f(t) = \sum c_n u_m^*(t) u_n(t) \quad | \int dt$$

$$\int dt u_m^*(t) f(t) = \sum_n c_n \underbrace{\int dt u_m^*(t) u_n(t)}_{\delta_{mn}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle u_m | f \rangle = c_m}$$

Die $\{c_n\}$ repräsentieren die Fkt f in der Basis $\{u_i\}$.

Für andere Basis sehen die Koeffizient anders aus.

• Skalarprod: $\langle g | f \rangle = \langle \sum_i b_i u_i, \sum_j c_j u_j \rangle$

$$= \sum_{i,j} b_i^* c_j \underbrace{\langle u_i | u_j \rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$\langle g | f \rangle = \sum_i b_i^* c_i \rightarrow \langle f | f \rangle = \sum_i |c_i|^2$$

• Analogie zum \mathbb{R}^3 :

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

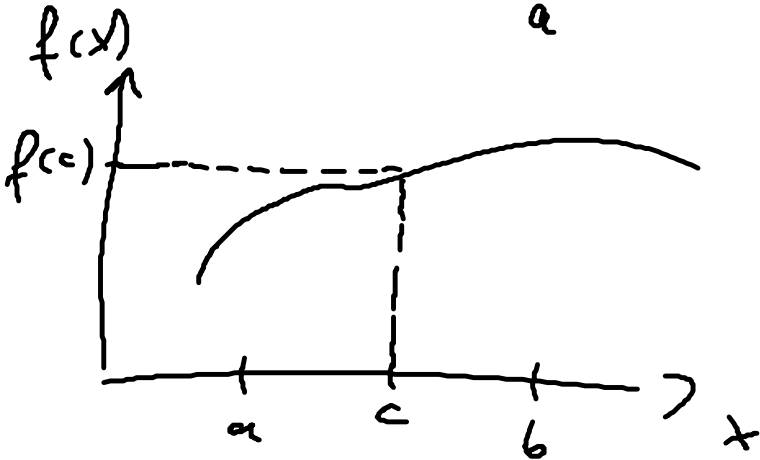
(a) Komponenten: $\underline{V} = \sum_{i=1}^3 v_i \underline{e}_i$ mit $v_i = \underline{e}_i \cdot \underline{V}$

(b) Skalarprod: $\underline{v} \cdot \underline{w} = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot w_i$

2.3 Die Deltafunktion

• Definition:

$$\int_a^b f(x) \delta(x-c) dx = \begin{cases} f(c) & c \in [a, b] \\ 0 & c \notin [a, b] \end{cases}$$



- δ -Fkt. pickt einen Punkt der Fkt aus dem Integral

- ein Punkt ($dx=0$) ist kein Integral

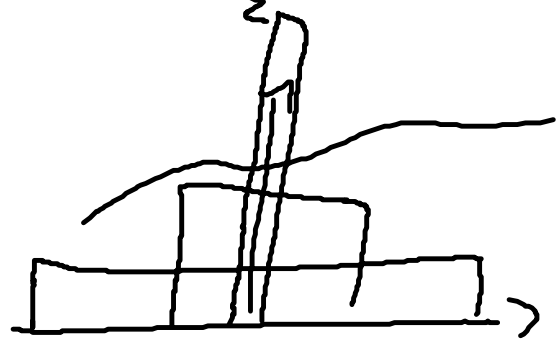
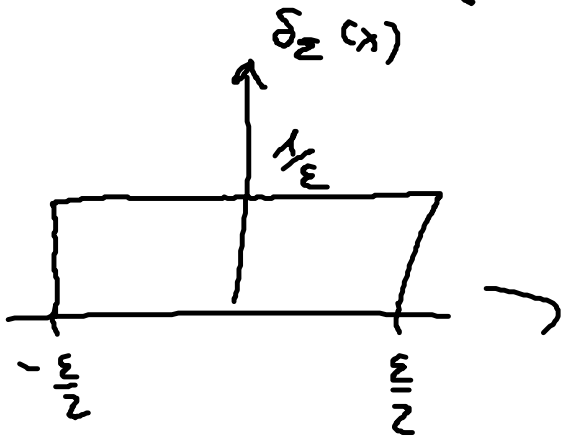
also muss $\delta(x=c) = \infty$

$\delta(x \neq c) = 0$

($0 \cdot \infty = f(c)$)

• Darstellung über Funktionschar:

$$(1) \delta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{für } |x| \geq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (\varepsilon > 0)$$



(a) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist Flächeninhalt $\int dx \delta_\varepsilon(x) = 1$

(b) Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man δ -Fkt

$$(2) f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \rightarrow \frac{e^{ikx}}{ix} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} e^{-|k|\varepsilon} = \dots = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x) \quad (\text{Lorentzkurve})$$

$$(3) \quad \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}, \quad \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \dots$$

• mathematisch: Distributionskalkül (

„lineares Funktional auf $C_0^\infty(\mathbb{R})$ “

$$\delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\delta_c[f] := \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x-c) = f(c)$$

• Beispiel: Massendichte einer Plat. Masse am Ort \underline{r}_0

$$m = \int d^3r \rho(r) \quad \leftarrow \text{Integral über Raum u. Massendichte ergibt die ganze Masse}$$

\uparrow Ort \underline{r}_0
 ∞ -klein

\uparrow Massendichte = $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{\text{endl.}}{0}$

$$\rho(\underline{r}) = m \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

$$m = \int d^3r m \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) = m$$

• kontinuierliches Kronecker δ :

$$\delta_{j,k} \quad (j \neq k) \quad \longleftrightarrow \quad \delta(x-y) = 0 \quad (x \neq y)$$

$$\sum_k \delta_{j,k} = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x-y) dx = 1$$

$$\sum_k a_k \delta_{j,k} = a_j \quad \longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x-y) f(x) dx = f(y)$$

Rechenregeln:

$$(1) \quad [\delta(x)] = \frac{1}{[x]} \leftarrow \text{Dimension}$$

$$(2) \quad \delta(-x) = \delta(x)$$

$$(3) \quad \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$$

$$(4) \quad \delta(x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2|x_0|} (\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0))$$

$$(5) \quad \delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n) \quad \begin{array}{l} x_n: \text{Nullstelle} \\ \text{von } f(x) \end{array}$$

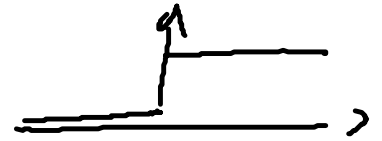
$$(6) \quad \int dx f(x) \delta'(x) = -f'(x=0)$$

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1$$

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) \delta(x-z) dx = \delta(y-z)$$

$$(9) \quad \partial_x \Theta(x) = \delta(x) \quad \text{mit} \quad \Theta(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(x) f(x) dx = \text{part. Int.}$$



$$\uparrow \\ f(\infty) = f(-\infty) = 0$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) f'(x) dx$$

$$= - \int_0^{\infty} f'(x) dx = f(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx$$

2.4 Fourierdarstellung von Funktionen

• Beispiel: komplexe Oszillatorgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x = 0$$

Ansatz: $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ löst Gl.

$$\rightarrow -\omega^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \omega = \pm \omega_0$$

$$x(t) = a e^{i\omega_0 t} + b e^{-i\omega_0 t} \quad \text{ist Lsg}$$

• Frage: Kann man Fkt.en $f(t)$ über $e^{i\omega t}$ darstellen?
Ja, wenn

(a) $f(t)$ T-periodisch ist: $f(t) = f(t + T)$

$$\rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad \text{mit } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

"Fourier-Reihe"

(b) f quadrat-integrabel ist: $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \text{endlich}$

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} d\omega f(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{"Fourier-Integral"}$$

• Fourier-Reihe:

Werkzeug in Physik, Informatik, Elektro- und Nachrichtentechnik

Idee: Jede Fkt. enthält Anteile von bestimmten Schwingungen.

Basisfunktion: $u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\omega_n t}$
 \swarrow Normierung

(a) Orthogonalität

$$\langle u_m | u_n \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \frac{e^{-i u \frac{2\pi}{T} t}}{\sqrt{T}} \frac{e^{i u \frac{2\pi}{T} t}}{\sqrt{T}}$$

$$= \dots = \delta_{m,n}$$

(b) Vollständigkeit

$$\sum_u u_n^*(t) u_n(t') = \frac{1}{T} \sum_u e^{-i u \frac{2\pi}{T} t} e^{i u \frac{2\pi}{T} t'}$$

$$= \dots = \begin{cases} \infty & \text{für } t' = t + nT \\ 0 & \text{für } t' \neq t \end{cases}$$

$$= \delta(t - t')$$

• Ansatz: $f(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} c_u u_n(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} c_u \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i u \frac{2\pi}{T} t}$

↗
nicht da, steht dann
in c_u

• Komponenten:

$$c_m = \langle u_m | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt e^{-i u \frac{2\pi}{T} t} f(t)$$

Sind Gewichtungsfaktoren, die sagen, wie stark

eine Oszillation mit Frequenz $\frac{2\pi u}{T}$ enthalten ist.

• Eigenschaften:

(a) $f(t)$ reell $\rightarrow c_n = c_n^*$

(b) $f(t)$ gerade \rightarrow reine Kosinusreihe

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{c_0}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

(c) $f(t)$ ungerade \rightarrow reine Sin-Reihe

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$$

(d) Parsevaltheorem: $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt |f(t)|^2 = \sum_n |c_n|^2$

$$(e) \sum_n e^{j n \frac{2\pi}{T} t} = \sum_n \delta(t - 2\pi n)$$

(f) die Fourierreihe einer Fkt. f konvergiert gegen

$$\begin{cases} f(x_0) & f \text{ in } x_0 \text{ stetig} \\ \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right) & f \text{ in } x_0 \text{ unstetig} \end{cases}$$

