

4. Vektorrechnung in orthogonalen, krummlinigen Koordinatensystemen

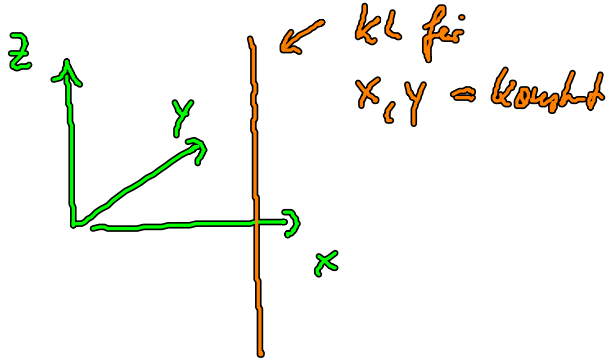
4.1. Orthonormierte Dreibeine

- 3 Zahlen ausreichend um Ortsvektor festzulegen: \vec{r}
- Ortsvektor und 3 weitere Zahlen legen Vektor im Raum (Vektorfeld) fest, z.B. elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$
- verschiedene Koordinaten (festlegen der Zahlen) mögl.
- Koordinatenlinie eines Koordinatensystems:

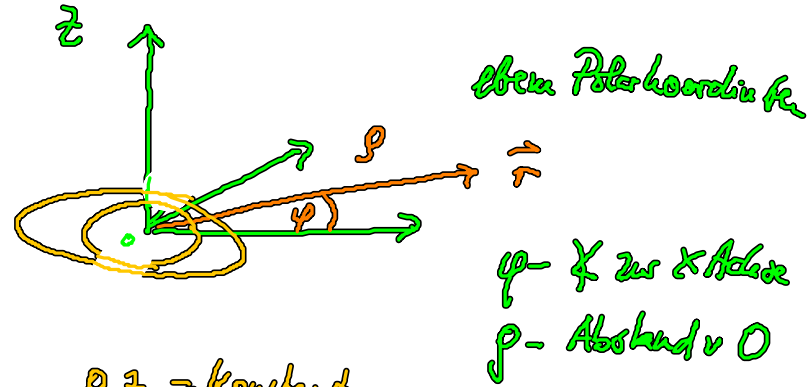
Linien bzw. Kurve im Raum die entstehen,
wenn jeweils 2 Koordinaten festgehalten werden
und eine variiert wird \rightarrow 3 Arten von KL

kartesisch

krummlinig



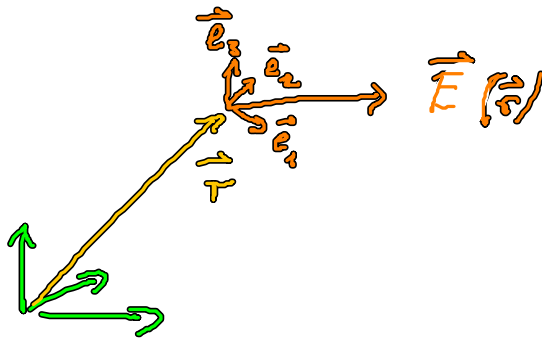
KL sind Gerade
 → geradlinige KS



$\rho, z = \text{konstant}$
 KL sind Kreise in Ebenen
 → krummlinige KS

φ - Winkel zur x-Achse
 ρ - Abstand zu O

Beschreibung eines Vektorfeldes



das KS um $\vec{E}(\vec{r})$
 festzulegen legt man ein
 lokales (am Ort \vec{r})
Dreibar (3 Achsen mit
 Einheitsvektoren)
 fest

- Vektor wird durch die 3 Vektoren $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ aufgespannt

$\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ wird lokales Dreibar genannt

- man verwendet oft lokale, orthogonale, normierte Dreibare:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 & i=j \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 & i \neq j \end{cases}$$

↑
↑ aufeinander

„orthonormiertes lokales Dreibein“

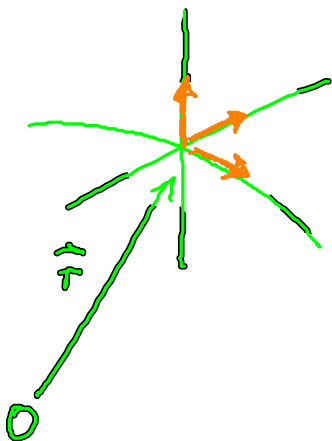
- Koeffizienten des Vektors in der Darstellung mit \vec{e}_i

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i \quad \text{mit } \vec{e}_j \text{ multipliziere}$$

$$\underline{\underline{\vec{a} \cdot \vec{e}_j}} = \sum_i a_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_i a_i \delta_{ij} = \underline{\underline{a_j}}$$

$$a_j = \vec{a} \cdot \vec{e}_j \quad \text{Bestimmung d. Koeffizienten}$$

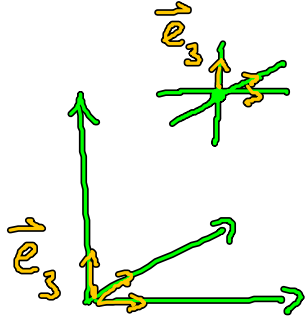
- orthogonale Dreibein wird entlang der Koordinatenlinien gewählt



Schnittv. 3 KL

→ $\{\vec{e}_i\}$ wird festgelegt

4.2. Kartesisches Koordinatensystem als Bsp. f. orthog. Dreibein



Schnitt der KL (Gerade)

Jeder Punkt als Summe 3er Einheitsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3. Eigenschaften v. orthonormiert Dreibein

a) orthonormiert heißt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

b) 2 Einheitsvektoren gegeben, so kann 3er erzeugt werden:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k \quad \text{damit liegt man Rechts system}$$

gilt für Richtungen 1, 2, 3
i j k

zyklisch Vertauschung mögl. \rightarrow 3, 1, 2 oder 2, 3, 1

c) Spatprodukt aus ε -Tensor festzulegen:

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 0 & \text{2 Indizes gleich (Spur = 0)} \\ 1 & \text{wenn } ijk \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wird zyklisch} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}$$

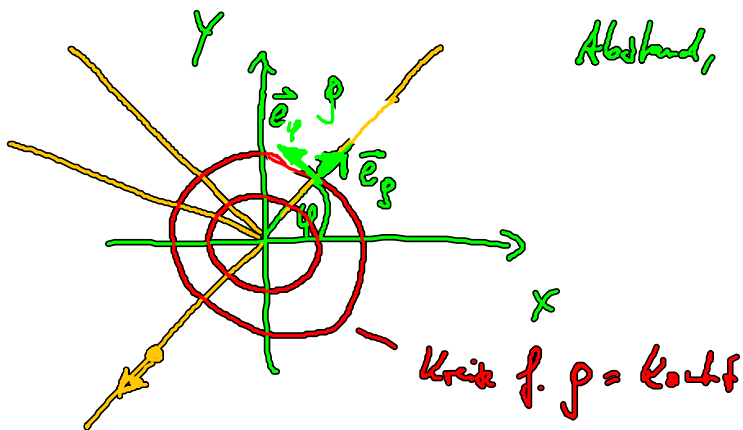
↑
antizyklisch

4.4. Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme

KS ist da die KL keine Gerade sind

Einheitsvektoren sind gewählt als Tangentenvektoren an KL

Beispiel ebene Polarkoordinaten



Abstand, Winkel als Koordinaten

Gerade f. $\varphi = \text{konst.}$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\arctan \frac{y}{x} = \varphi$$

$$x = \cos \varphi \rho$$

Bild: $\vec{e}_\rho \propto \vec{r}$ Punkt

$$\vec{e}_\rho = \frac{x \vec{e}_x + y \vec{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\cos \varphi \rho \vec{e}_x + \rho \sin \varphi \vec{e}_y}{\rho}$$

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$$

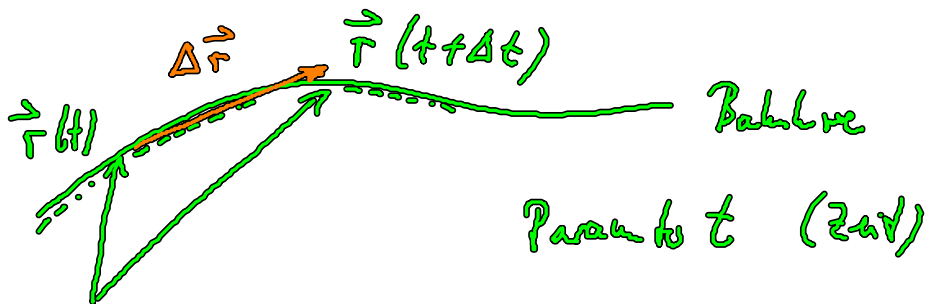
$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

$$Y = \sin \varphi \rho$$

das war bastek!

4.4.1 Methode zur Bestimmung der Einheitsvektoren

Koordinatlinien als Bahnkurve auffassen



Ableitg. an Bahnkurve ist Tangentialvektor

Tangentialvektor: $\frac{d\vec{r}}{dt}$

Analogieschluss: $t \leftrightarrow$ (veränderliche) Koordinate der KL (u, v, w)
 ρ, φ, z

jede einzelne veränderliche Koordinate gibt eine Bahnkurve

Tangenteinheitsvektor $\vec{e}_u = \vec{r}(u, v, w)$

$$\vec{e}_u = \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} \quad / \quad \left| \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} \right|$$

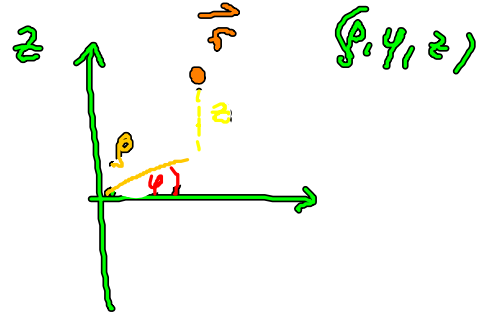
partielle Ableitg. stellt

nach a f. Normierung
 $v, w = \text{konst}$ sich
 stellt richtig sich

→ jeder Eichtektor in Koordinate u, v, w
 kann berechnet werden, wenn $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$ bekannt.

4.4.2. Zylinderkoordinaten und Eichtektoren

$$\vec{r} = (x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$



$$\bullet \vec{e}_\rho \propto \partial_\rho \vec{r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$|\partial_\rho \vec{r}| = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 0)^{1/2} = 1$$

$$\vec{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \text{ stimmt mit Borelansatz überein}$$

$$\bullet \vec{e}_\varphi \propto \partial_\varphi \vec{r} = (\rho \cdot -\sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0)$$

$$|\partial_\varphi \vec{r}| = (\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi + 0)^{1/2} = \rho$$

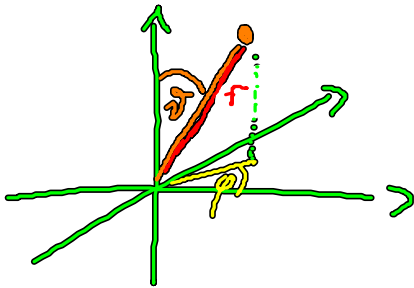
$$\vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 0, 1)$$

man sieht $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

4.4.3. Kugelkoordinat und Euklidische

$$\vec{r} = (x, y, z) = (\underbrace{r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta}_{\rho \text{ Zylinderkoordinat}})$$



Beweis der ÜA (o.g.)

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} + \text{Skizze}$$

4.5. Komponentenrechnung f. orthogonale Basis

$$\bullet \vec{a} + \vec{b} = \sum_i a_i \vec{e}_i + \sum_i b_i \vec{e}_i = \sum_i (a_i + b_i) \vec{e}_i$$

Komponentenweise addieren

$$\bullet \lambda \vec{a} = \lambda \sum_i a_i \vec{e}_i = \sum_i \lambda a_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

↑
Zahl

$$\begin{aligned} \bullet \vec{a} \cdot \vec{b} &= \sum_i a_i \vec{e}_i \cdot \sum_j b_j \vec{e}_j = \sum_{ij} a_i b_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{ij}} \\ &= \sum_i a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{a} \times \vec{b} &= \sum_i a_i \vec{e}_i \times \sum_j b_j \vec{e}_j \\ &= \sum_{ij} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \quad \text{Summe ausrechnen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \overset{i=1 \quad j=1}{=} a_1 b_1 (\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{=0}) + \overset{i=1 \quad j=2}{a_1 b_2 (\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3})} + a_1 b_3 (\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2})
 \end{aligned}$$

... all same

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3$$

identisch

ods:
$$= \sum_{ijk} a_i b_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k \epsilon_{ijk}}$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \sum_i a_i \vec{e}_i = \sum_i \dot{a}_i \vec{e}_i + \sum_i a_i \dot{\vec{e}}_i$$

gilt üblich Produktregel

$$\frac{d}{dt} \vec{a} \cdot \vec{b} = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}$$

später wichtig
f. Scherkräfte
in Mechanik
f. bew. Beisp.

• Skalarprodukt: $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$

$$\sum_i c_i \vec{e}_i \cdot \sum_{jke} \epsilon_{jke} a_j b_k \vec{e}_e =$$

$$\sum_{ijke} c_i a_j b_k \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_e}_{\delta_{ie}} \epsilon_{jke} =$$

$$\sum_{ijk} c_i a_j b_k \epsilon_{ijk} =$$

$$\underbrace{c_1 a_2 b_3}_{\uparrow} + \underbrace{c_3 a_1 b_2}_{\uparrow} + c_2 a_3 b_1 \quad \text{zyklisch}$$

$$- c_1 a_3 b_2 - c_2 a_1 b_3 - c_3 a_2 b_1 \quad \text{antizyklisch}$$

+ 0

gleich Null

3x3 Kombination v. Zeilen

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \equiv \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Determinante als Anordn. v. 4×4 Zellen

als Umrechnungsformel.

Da Spatprodukt ist dual Determinante gegeben (Tutorium)

- Kreuzprodukt als Determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

$$- \vec{e}_2 (\quad)$$

$$+ \vec{e}_3 (\quad)$$