5. Felder

Größen die sich zeitlich und räumlich ändern werden Felder genannt

(i) skalare Felder: Temperatur $(\vec{r}, t) \rightarrow T(\vec{r}, t)$

Potential $(\vec{r}, t) \rightarrow U(\vec{r}, t)$

(ii) Vektorfelder: elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$

Gravitationskraft $\vec{F}(\vec{r}, t)$

(iii) Tensorfelder (später)

Zentral f. Charakterisierung v. Feldern ist

Nabla Operator $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z = \sum_i \vec{e}_i \partial_i$

ist ein symbolischer Vektor und

bearbeitet Objekte die rechts davon stehen

(i) $\underline{\mathrm{grad}}\,\phi(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}\phi = \vec{e}_x \partial_x \phi + \vec{e}_y \partial_y \phi + \vec{e}_z \partial_z \phi$

$\uparrow$

Skalar

<u>Gradient</u> einer skalaren Funktion

macht aus Skalar $\phi \rightarrow$ Vektor-feld $\vec{\nabla}\phi$

(ii) $\underline{\mathrm{div}}\,\vec{v}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$

<u>Divergenz</u> von $\vec{v}$

macht aus Vektor ein Skalar Feld

(iii) $\mathrm{rot}\,\vec{v}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_y \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

$= \vec{e}_x\left(\partial_y v_z - \partial_z v_y\right) + \dots$

Rotation von $\vec{v}$

ordnet Vektor $\vec{v}$ einem Vektorfeld zu

5.1. Einführung von Nabla an physikalischem Beispiel

Bilanz der kinetischen Energie

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}\right) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}(\vec{r})$$

kinetische Energie   Leistg.

<u>Annahme</u>: $\vec{f} = -\left(\vec{e}_x \partial_x U(\vec{r}) + \vec{e}_y \partial_y U(\vec{r}) + \vec{e}_z \partial_z U(\vec{r})\right)$

$\vec{f}$ soll aus U darstellbar U: Skalarfeld

Einschränkg., aber: <u>wichtige Felder</u> können so dargestellt werden

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U(\vec{r})$$

Einsetzen

$$\frac{d}{dt} T = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{r})$$

kinetische En.

$$= -\left(\dot{x}\,\partial_x U(\vec{r}) + \dot{y}\,\partial_y U(\vec{r}) + \dot{z}\,\partial_z U(\vec{r})\right)$$

$$\frac{d}{dt} T = - \frac{d}{dt} U(\vec{r})$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(T + U\right)}_{} = 0$$

Energiebilanz

$\frac{d}{dt} E = 0$

wenn $\vec{f} = -\vec{\nabla} U$

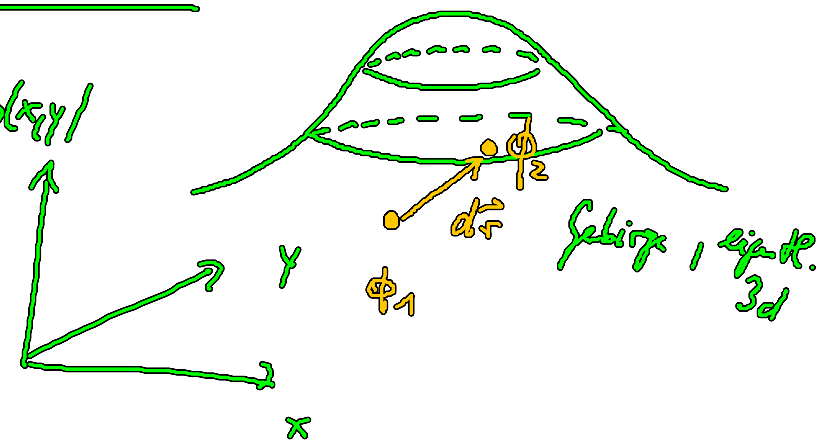
Gesamtenergie T: kinetische E.

U: potentielle E.

5.2 Gradient eines skalaren Felds

$\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi \to d\phi$

diskutiere $\phi(\vec{r})$ $\phi(x,y)$



mögl. Charakterisierung v. ϕ ist Änderung von ϕ

wenn um $d\vec{r}$ fortschreiten

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \Delta x \\ y_2 &= y_1 + \Delta y \\ z_2 &= z_1 + \Delta z \end{aligned}\right\} d\vec{r}$$

0. Term kompensiert sich

Taylorreihe f. klein $\Delta\vec{r}$: 1. Term überlebt

$$\approx \frac{\partial}{\partial x}\phi(\vec{r})\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\phi(\vec{r})\,\Delta y + \frac{\partial}{\partial z}\phi(\vec{r})\,\Delta z$$

$$\Delta\phi = \underbrace{\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}}$$

was passiert mit ϕ wenn man um $\Delta\vec{r}$ fortschreitet

<u>Bemerkungen</u> :

a) die größte ϕ-Zunahme ergibt sich für $\vec{\nabla}\phi \parallel \Delta\vec{r}$

$\rightarrow \vec{\nabla}\phi$ bestimmt die Richtg. d. stärksten Anstiegs

b) entlang Fläche / Linien von $\Delta\phi = 0$

d.h. von Höhenlinien

$$\vec{\nabla}\phi \cdot \Delta\vec{r} = 0$$

$\rightarrow$ $\vec{\nabla}\phi$ steht $\perp$ auf Flächen/Linien gleicher ϕ-Werte

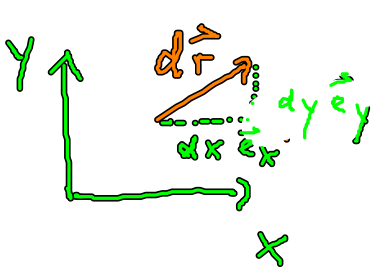
($\perp$ auf Höhenlinien bzw. Äquipotentialflächen)

5.3. Nablaoperator und krummlinige Koordinaten

$d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$ wird genutzt um Nabla in krummlinige Koordinaten zu berechnen

$$x, y, z \longrightarrow u, v, w$$

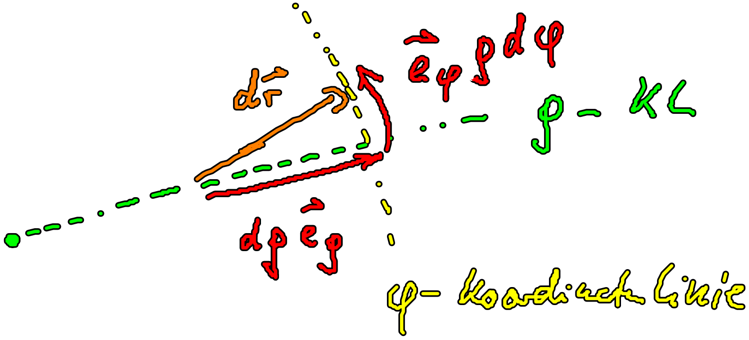
kartesisch



jeder kleine Weg $d\vec{r}$ so aufspannbar

$$d\vec{r} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$$

krummlinig Bsp. Polarkoordinaten in Ebene



$$d\vec r = \underline{\rho}\, d\varphi\, \vec e_\varphi + d\rho\, \vec e_\rho$$

$$d\vec r \neq du\, \vec e_u + dv\, \vec e_v + dw\, \vec e_w$$ im allgemein

im allgemeinen: $d\vec r = \underline{g_u}\, du\, \vec e_u + \underline{g_v}\, dv\, \vec e_v + \underline{g_w}\, dw\, \vec e_w$

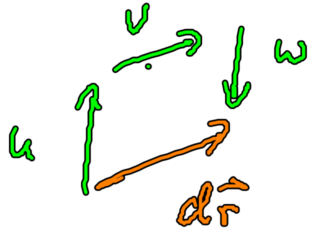
sind Korrekturen in krummlinige Koordinaten für $d\vec r$ und heißen

<u>metrische Koeffizienten</u>

wie bekommt man metrische Koeffizienten?

$\vec r(u,v,w)$, falls man entlang KL: $\dfrac{d\vec r}{du} = \dfrac{\partial \vec r}{\partial u}$

$$d\vec r = \frac{\partial \vec r}{\partial u}\, du + \frac{\partial \vec r}{\partial v}\, dv + \frac{\partial \vec r}{\partial w}\, dw$$



$$\phi(u,v,w)$$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\phi}{\partial v}\,dv + \frac{\partial\phi}{\partial w}\,dw \qquad \text{Kettenregel}$$

$$= \partial_u\phi\,\underbrace{\vec e_u\cdot\vec e_u}_{1}\,du\,\frac{g_u}{g_u} + \dots\{v\}\dots\{w\}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{g_u}\,\vec e_u\,\partial_u\phi}_{\text{u-te Komponente des Nablaoperators}}\cdot\underbrace{\vec e_u\,g_u\,du}_{\text{Länge ist }\vec e_u\text{ Richtg. die man geht um }d\vec r\text{ zusammenzubauen}} + \;..\;\;..$$

$$\vec\nabla = \vec e_u\,\frac{1}{g_u}\,\partial_u + \vec e_v\,\frac{1}{g_v}\,\partial_v + \vec e_w\,\frac{1}{g_w}\,\partial_w$$

$$\vec\nabla\Big|_{\text{kartesisch}} = \vec e_x\,\partial_x + \vec e_y\,\partial_y + \vec e_z\,\partial_z$$

metrische Koeffizienten sind:

$$g_u = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|$$

kartesisch: $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \right| = 1$

$\vec{r} = (x, y, z)$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 0)$

$\rightarrow \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right| = 1$

Zylinderkoord.: $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = 1$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \rho$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1$

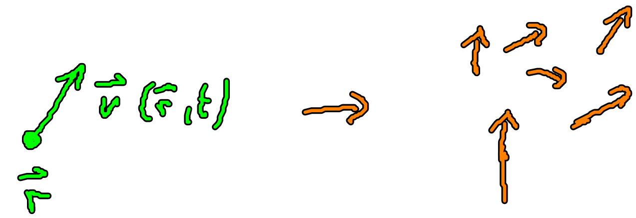
$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \, \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \, \partial_\varphi + \vec{e}_z \, \partial_z$$

Kugelkoordinaten: $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| = r \sin\vartheta$

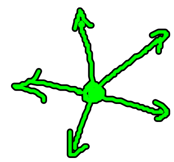
$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \, \partial_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \, \partial_\varphi + \frac{1}{r \sin\vartheta} \, \partial_\vartheta$$

5.4. Charakter v. Vektorfeldern

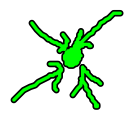
typischerweise durch Feldlinienbilder charakterisiert



Zwei Fragen a/ kommt es zu Entstehen bzw Verschwinden von Feldlinien in einem Pkt $\vec r$

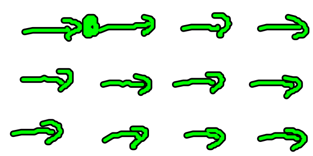


Feld hat Quelle

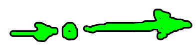


Senken

$\vec\nabla\cdot\vec v \neq 0$



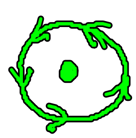
Keine Quelle / Senken



Quelle

b/ kommt es an Punkt $\vec r$ zu Wirbeln

$\vec\nabla\times\vec v \neq 0$



Wirbel d. Feldes an Pkt $\vec r$

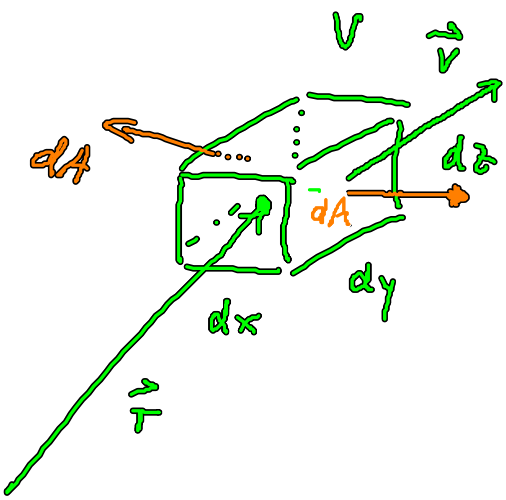
a) Quelldichte : Div $\vec v$

wird zeigen: $\operatorname{div} \vec{v} \;\hat{=}\; \frac{1}{V} \int_{(\partial V)} d\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \Big|_{V \to 0}$

ansch. Volumen V um $\vec{r}$

Oberfläche d. V.: ∂V

$\stackrel{!}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$



∂V = Oberfläche d. Würfels

$d\vec{A}$: Vektor nach außen und Betrag $dy\,dz$ (Fläche)

$$\operatorname{div} \vec{v} \;\hat{=}\; \frac{1}{\underbrace{dx\,dy\,dz}_{V}} \Big\{ \overbrace{V_x\left(x + \tfrac{dx}{2}, y, z\right) dy\,dz}^{\text{Beitrag d. eingezeichneten Quadrats}}$$

$$+ \overbrace{V_x\left(x - \tfrac{dx}{2}, y, z\right)(-dy\,dz)}$$

$+ V_y$ und V_z analog

$$= \frac{1}{dx\,dy\,\cancel{dz}} \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} V_x(x,y,z)\, \cancel{dx\,dy\,dz}}_{\text{1. Ordg Taylorreihe}} + \dots \right)$$

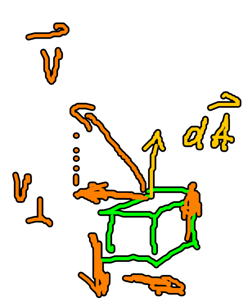
$$= \frac{\partial}{\partial x} V_x(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y} V_y(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z} V_z(x,y,z)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}$$

__Interpretation:__ weil Feldlinien die an OF auslaufen gezählt werden, ist $\operatorname{div} \vec{v}$ Maß für die Quellen ($\operatorname{div} \vec{v} > 0 \;\hat{=}$ Entstehg. v. Feldlinie / bzw Senken ($\operatorname{div} \vec{v} < 0 \;\hat{=}$ Vergehen v. Feldlinien) dem so ist Integral definiert. $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$: __Quelldichte__

b) Wirbeldichte

ähnlich wie divergenz



$$\operatorname{rot}\vec{v} \equiv \frac{1}{V}\oint d\vec{A}\times\vec{v}(\vec{r})$$

sammeln jetzt statt der Normalkomponente des Feldes (Quelle) die senkrechte Komponente zum Oberflächenelement

→ Maß für die Wirbel

$$(\operatorname{rot} v)_i = \frac{1}{dx\,dy\,dz}\sum_{jk}\Big(\varepsilon_{ijk}\, dA_j\, v_k\big(\vec{r}+\tfrac{dx_j}{2}\vec{e}_j\big) - \varepsilon_{ijk}\, dA_j\, v_k\big(\vec{r}-\tfrac{dx_j}{2}\vec{e}_j\big)\Big)$$

Flächenelement negativ

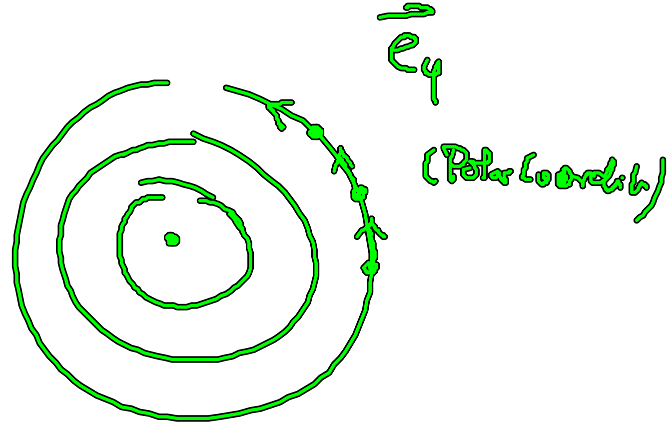
Taylorreihe 0-Term → 0

$$= \frac{1}{dx\,\cancel{dy}\,dz}\underbrace{\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\,\cancel{dx_i}\,dx_k\,\partial_j v_k(\vec{r})\,\cancel{dx_j}}_{\text{Kreuzprodukt aus } \vec{\nabla},\,\vec{v}}$$

$$= \vec{\nabla}\times\vec{v}$$

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{v}}$$

5.5. Beispiele



$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} =$$

$$\left(\vec{e}_\rho \partial_\rho + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z \right) \times v_0 \vec{e}_\varphi =$$

mit $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_\varphi \times v_0 \vec{e}_\varphi$$

$$= \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \times v_0 \partial_\varphi \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{-\vec{e}_\rho}$$

$$= \frac{v_0}{\rho} \vec{e}_\varphi \times \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{v_0}{\rho} \vec{e}_z$$

Berechnung wichtiger Identitäten:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0 \qquad (i)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \qquad (ii)$$

Beweis (i) $\left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi)\right]_i =$

$$\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \left[\vec{\nabla}\varphi\right]_k =$$

$$= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, \partial_k\, \varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k \varphi + \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k \varphi \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k \varphi + \sum_{jk} \varepsilon_{ikj}\, \partial_k \partial_j \varphi \right)$$

vertauschbar

$$= \frac{1}{2}\left(-\;''\;- \quad \sum_{jk} - \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k \varphi \right)$$

$$= 0$$