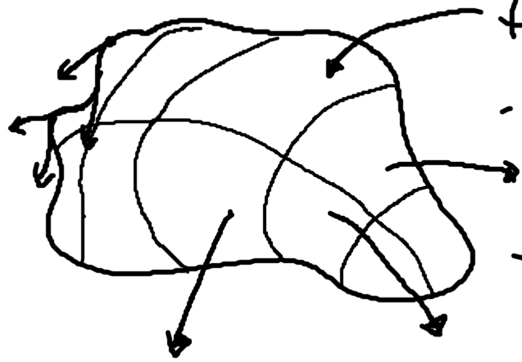
6. Höherdimensionale und Vektorintegration

• Motivation für Integration im Raum:



Fläche ∂V (A) umschließt Volumen V

- Berechnung v. Flächeninhalt und Volumina
- Berechnung d. Flußes I eines Vektorfeldes durch Oberfläche (OF) ∂V (Flüssigkeit) (Kapt. 5 Quelle u. Senke)

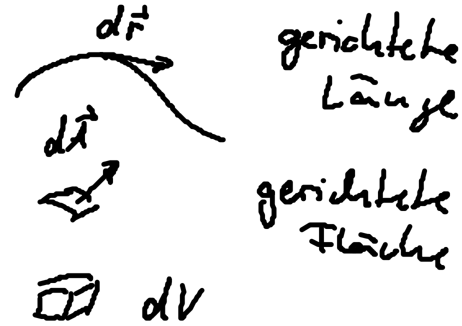
- Berechnung der Arbeit entlang einer Kurve

• Bemerkungen:

(a) Integrale werden bestimmt in dem statt über dr in 1D

- über $d\vec{r}$ (Kurvenstück)
- über $d\vec{A}$ (Flächenelement)
- über dV (Volumenelement)

integriert wird

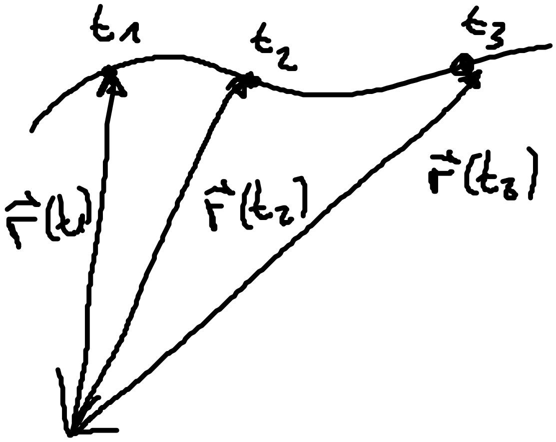


(b) es ex. wichtige Integralsätze die Volumen- mit OF-Integrale und OF- mit Kurvenintegrale verbinden

6.1 Kurvenintegrale

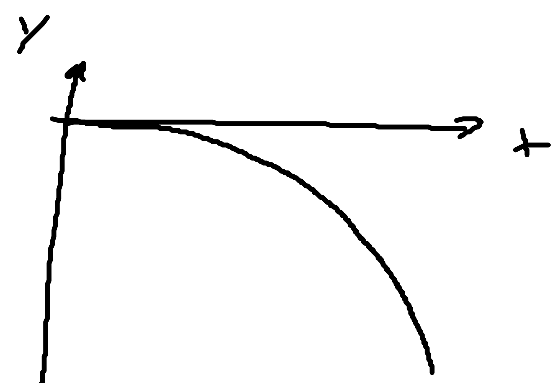
(a) Darstellung von Kurven

Eine Kurve im Raum kann als Bahnkurve verstanden werden: $\vec{r}(t)$ t ist Parameter (z.B. Zeit)



$\vec{r}(t) \hat{=}$ Parameterdarstellung der Kurve

- Beispiel: Wurfparabel

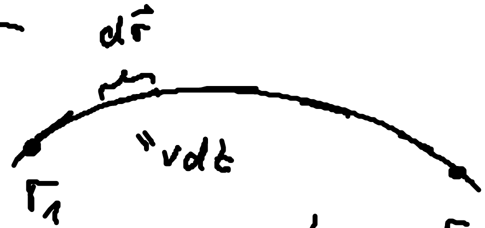


$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2} g t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 \end{aligned}$$

beschreibt Parabel als Kurve

(b) Kurvenlängen

$|d\vec{r}| \equiv dr = v(t)\,dt$



$$S = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dr = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

- Beispiel:

$$S_{parabel} = \int_0^t dr = \left| \begin{array}{l} \vec{r} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -g t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = -g t \end{array} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^t dt'\,\sqrt{v_0^2 + g^2 t'^2} = \frac{t}{2}\sqrt{g^2t^2+v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}\ln\left(\frac{gt+\sqrt{g^2t^2+v_0^2}}{v_0}\right)$$

$$S_{kreis} = \int_{kreis} dr = \left| \begin{array}{l} \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \end{array} \right|$$

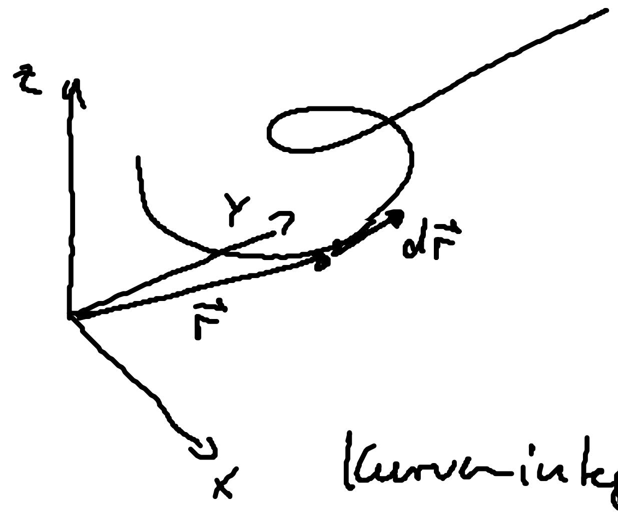
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\,\left(R^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi\right)^{1/2}$$

$$= R\int_0^{2\pi} d\varphi\,1 = 2\pi R$$

→ Parametrisierung muß nicht unbedingt über Zeit erfolgen, kann über ∡ oder Länge geschehen

(c) allgem. Kurvenintegral (gerichtete Linienelement $d\vec{r}$)

geg. sei Kurve K im Raum



Fragestellung:

- Berechnung v. gerichteten Länge
- Arbeit wenn Kraftfeld $\vec f$ vorliegt
- el. Strom entlang Draht

Kurvenintegral kann über Zahlen, Vektoren

- wichtige Kombination:

(1) skalare Funktion → vektorwertig

$$\int d\vec r \, g(\vec r) = \vec V$$

(2) Feld via Skalarprod → skalar

$$\int d\vec r \cdot \vec g(\vec r) = S$$

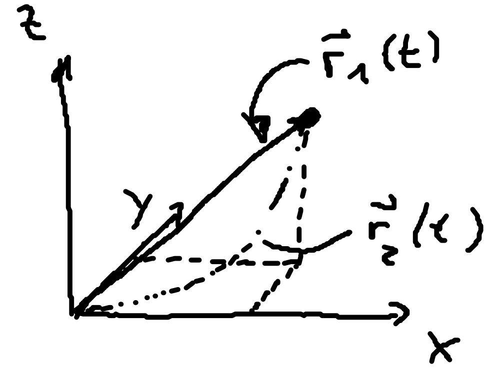
(3) Feld via Kreuzprod → vektorwertig

$$\int d\vec r \times \vec g(\vec r) = \vec V$$

Berechnung über Parameterdarstellung d. Kurve $\vec r = \vec r(t)$

$$\int_K d\vec r \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rechenzeichen}}}{\_\_} \overset{\text{Integrand}}{g(\vec r(t))} \longrightarrow \int_{K(t)} \frac{d\vec r}{dt} dt \_\_ g(\vec r(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \underbrace{\dot{\vec r}(t)}_{\text{geg. über Kurve}} \_\_ g(\vec r(t))$$

· Beispiel: $\vec{f}(\vec{r}) = (yz, xz, xy)$ [N]



Welche Arbeit wird bei der Bewegung von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$ im Kraftfeld $\vec{f}$ verrichtet?

$$\vec{r}_1(t) = (\underset{x}{\underset{\shortparallel}{t}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{t}}, \underset{z}{\underset{\shortparallel}{t}})\ [\text{m}] \qquad \dot{\vec{r}}_1(t) = (1, 1, 1)\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

$$W_{0\to 1} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \int_0^1 dt\, \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{f}(\vec{r}(t))$$

$$= \int_0^1 dt\, \frac{\text{m}}{\text{s}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(t)\,z(t) \\ x(t)\,z(t) \\ x(t)\,y(t) \end{pmatrix} N = \int_0^1 dt\, \frac{\text{Nm}}{\text{s}} \left[y(t)z(t) + x(t)z(t) + x(t)y(t) \right]$$

$$= \int_0^1 dt\, \frac{\text{Nm}}{\text{s}} \left[t^2 + t^2 + t^2 \right] = 3 \cdot \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = 1\ \text{Nm}$$

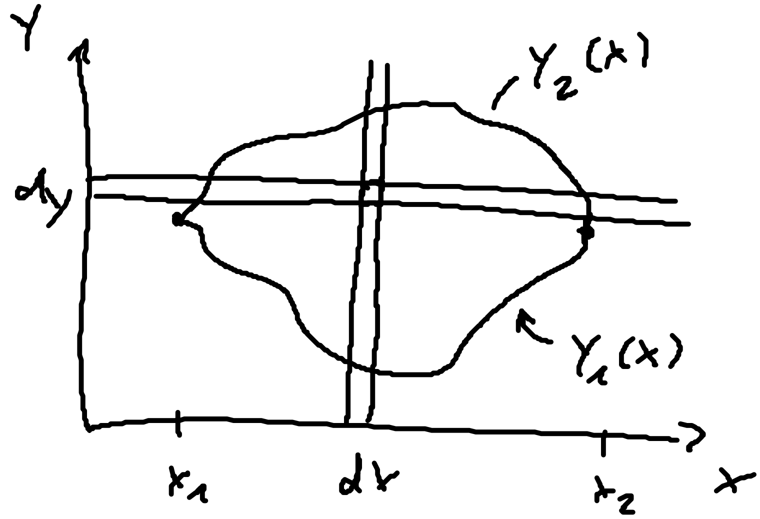
$\to$ ÜB: $\vec{r}_2(t) = (t, t^2, t^2)$ [m]

6.2. Oberflächenintegrale

(a) ebene Flächen im karth. System

geg. sei Fläche in Ebene: - Flächeninhalt?

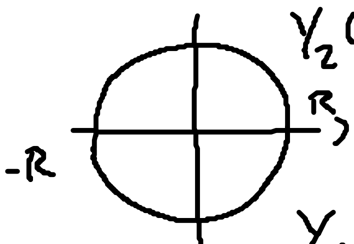
– Masse eines Flächenstücks mit Massendichte $[\sigma] = \frac{kg}{m^2}$



$$F = \int dA \; g(x,y) = \sum_{ij}^{\in \text{Fläche}} \Delta x \Delta y \; g(x_i,y_i) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} dy \; g(x,y)$$

kann auch vektorwertig sein

- Beispiel: Kreisfläche



$Y_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$Y_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} dy \; 1$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(Y_2(x) - Y_1(x) \right)$$

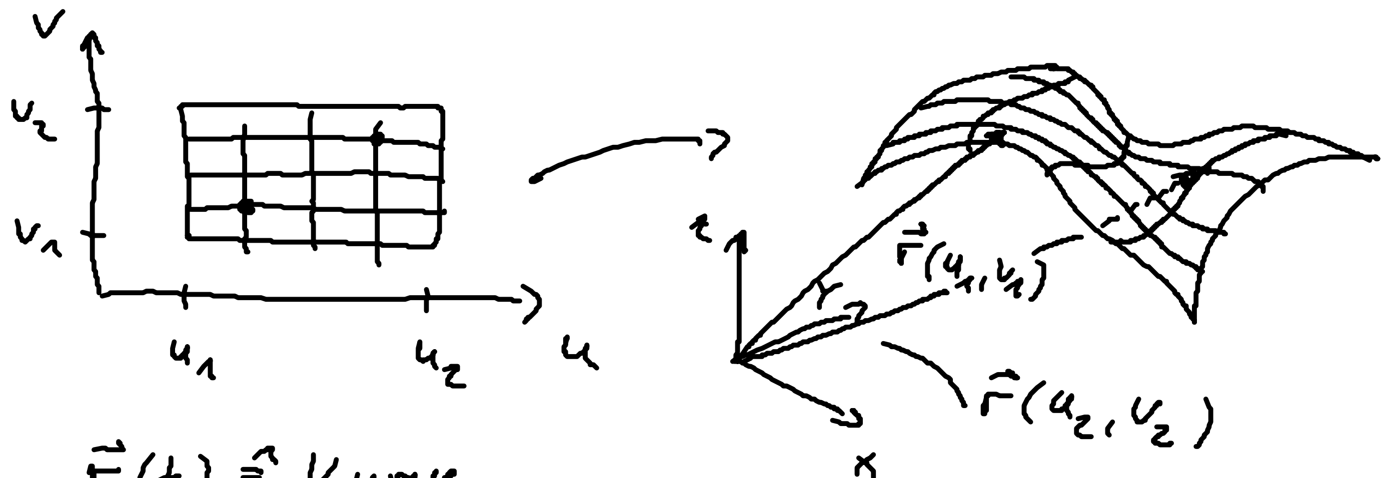
$$= \int_{-R}^{R} dx \left(\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{R^2 - x^2} \right) = 2R \int_{-R}^{R} dx \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \frac{x}{R} & x = R \Rightarrow u = 1 \\ dx = R\,du & x = -R \Rightarrow u = -1 \end{array} \right| = 2R^2 \int^{-1} du \left(1 - u^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sin\varphi & u=-1 \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{du}{d\varphi} = -\cos\varphi & u = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \\ du = \cos\varphi \, d\varphi & \end{array} \right| = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\varphi \, (\underbrace{1-\sin^2\varphi}_{\cos^2\varphi})^{1/2}$$

$$= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos^2\varphi = 2R^2 \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi R^2}}$$

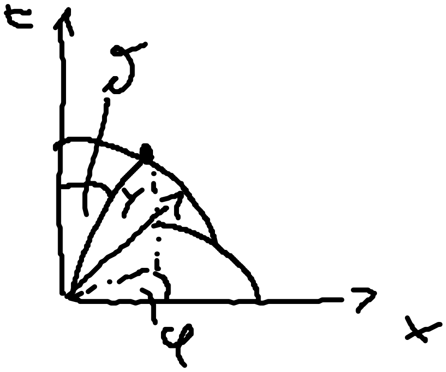
(6) Darstellung v. Flächen im Raum



$\vec{r}(t) \hat{=}$ Kurve

$\vec{r}(u,v) \hat{=}$ Fläche (tastet OF als Fkt v. 2 Parametern (u,v) ab)

· Beispiel: Kugeloberfläche

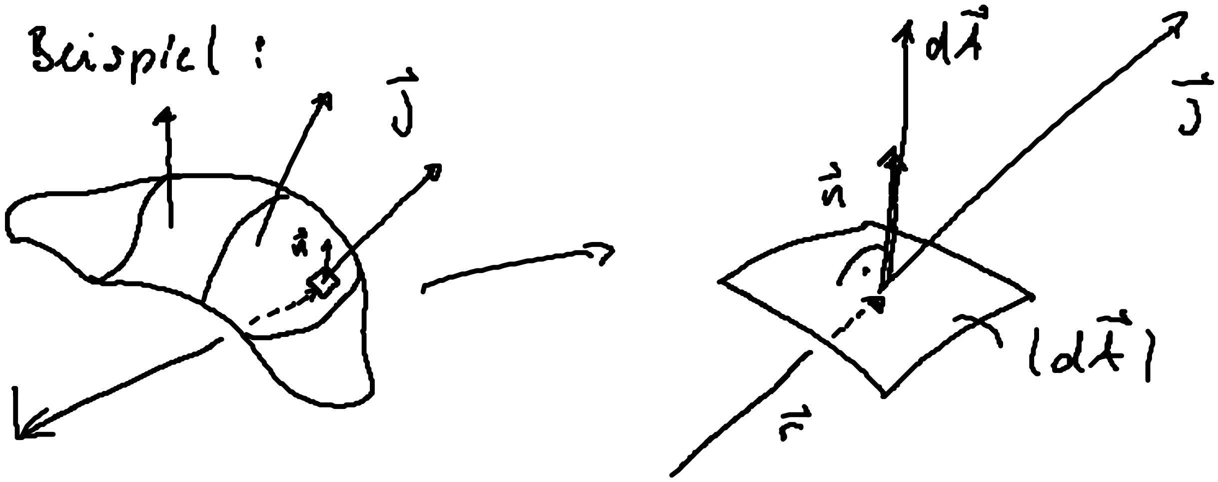


$$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\vartheta \\ R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

(c) Oberflächenintegral im Raum

→ Flächenintegrale auf gewölbten Fläche

· Beispiel:



Normalenvektor $\vec{n}$ steht an jedem Ort $\vec{r}$ senkrecht auf der OF und zeigt nach Außen:

$$d\vec{A} = \vec{n}\, dA \quad \text{mit } |\vec{n}| = 1$$

→ Zerlegen Fläche in Flächenelement

(i) ohne Richtung $|d\vec{A}| \hat{=}$ Flächeninhalt

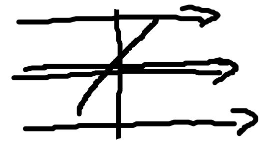
(ii) gerichtetes Element $d\vec{A}$ zeigt in Richtung $\vec{n} = \vec{n}(\vec{r})$

· wichtige Kombination:

(1) skalare Fluß eines Vektorfeldes

$$I = \int d\vec{A} \cdot \vec{j}$$ beschreibt den Fluß (Strom) durch Fläche

Skalarprod.



Zahl der Teilchen verringert sich wenn Fläche schräg gestellt wird

(2) Vektorfluß eines skalaren Feldes

$$\vec{I} = \int d\vec{A}\, f(\vec{r})$$

(3) Vektorfluß eines Vektorfeldes

$$\vec{I} = \int d\vec{A} \times \vec{f}(\vec{r})$$

(4) Flächeninhalt $\quad F = \int dA$

- Bezeichnung: $\oiint$ ← geschlossene Oberfläche

  ∂V = Oberfläche v. Volumen

- Bestimmen des Flächenelements $d\vec{A}$, dA:

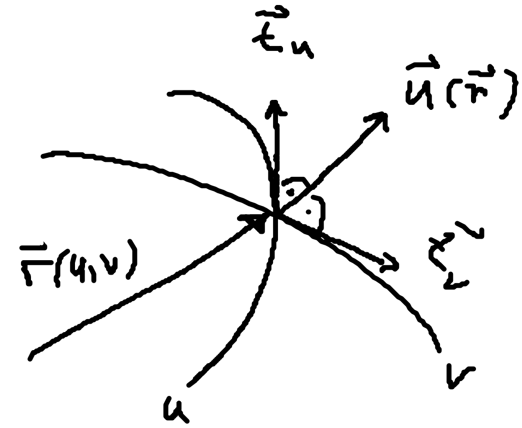
(i) Parametrisierung der Fläche $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$

(ii) Bestimmen der Tangentialvektoren

$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ und $\vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ entlang d. Koord.linie

(iii) Normalenvektor der Fläche berechnen

$$\vec{n}(\vec{r}(u,v)) = \frac{1}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|} \vec{t}_u \times \vec{t}_v$$



$\rightarrow$ dA = Flächeninhalt des Parallelogramms

$$= |\vec{t}_u du \times \vec{t}_v dv|$$

Geschw.

(Kurvenintegral: Kantenlänge $dr = v\,dt$

analog: $\quad v_u du \quad , \quad v_v dv$

denn: $\quad v_u = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| du \quad , \quad v_v = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| dv$

(iv) gerichtete Flächenelement

$$d\vec{A} = \vec{n}\, \underbrace{dA} = \frac{1}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|} \vec{t}_u \times \vec{t}_v \; |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| \, du\, dv$$

$$= \underbrace{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}_{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}} du\, dv$$

• Beispiele:

(1) Oberfläche einer Viertelkugel

(i) Parametrisierung $\vec{r} = \vec{r}(\varphi, \vartheta)$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(\vartheta,\varphi) \\ y(\vartheta,\varphi) \\ z(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\vartheta \\ R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

(ii) Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Flächenelement

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= R^2 \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} d\vartheta\, d\varphi$$

$$= R^2 \begin{pmatrix} 0 + \underline{\sin\vartheta} \cdot \cos\varphi\sin\vartheta \\ + \underline{\sin\vartheta} \cdot \sin\varphi\sin\vartheta - 0 \\ \cos\varphi\,\underline{\cos\vartheta} \cdot \cos\varphi\,\underline{\sin\vartheta} + \sin\varphi\,\underline{\cos\vartheta} \cdot \sin\varphi\,\underline{\sin\vartheta} \end{pmatrix}$$

$$= R^2\sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta\, d\varphi$$

$$= R^2 \sin\vartheta \, \vec{e}_r \, d\vartheta \, d\varphi$$

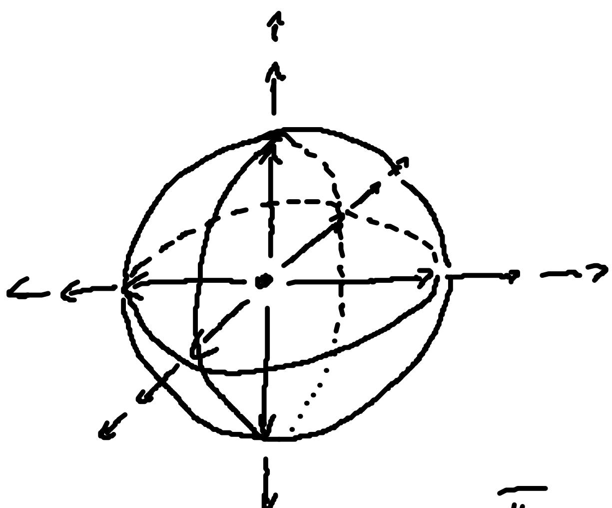
$$dA = |d\vec{A}| = \sqrt{d\vec{A} \cdot d\vec{A}} = \sqrt{R^4 \sin^2\vartheta \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{1} d\vartheta^2 d\varphi^2}$$

$$= R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\int\limits_{\substack{\text{Viertel}\\\text{kug}}} dA = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \, R^2 \sin\vartheta = \pi R^2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin\vartheta = \underline{\underline{\pi R^2}}$$

(ii) Fluß durch OF einer Kugel bei geg. Feld

→ elektr. Feld einer Punktladung in Kugelkoord.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r + 0 \cdot \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi$$

→ Flußintegral sollte die Quelle des Feldes angeben

$$\int d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, R^2 \sin\vartheta \, \vec{e}_r \cdot \vec{E}(\vec{r}(\vartheta,\varphi))$$

$$= \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, R^2 \sin\vartheta \, \overbrace{\vec{e}_r \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{e}_r}^{=1}$$

$0 \qquad 0$

$$= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} 2\pi \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{=2} = \underline{\underline{\frac{Q}{\varepsilon_0}}}$$

ÜZ: Fluß eines Dipolfeld