?

2 : 1

2 : 1

ÜA: Was steht hier in schwarzer Schrift?

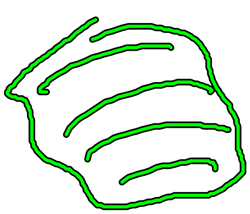
6.3. Volumenintegrale

a) Dreidimensionale Integrale in kartesischen Koord.

Berechnung 3d Integrale, auch über Vektorkomponenten, oft skalare Funktionen

$\phi(\vec{r})$ Skalarfeld

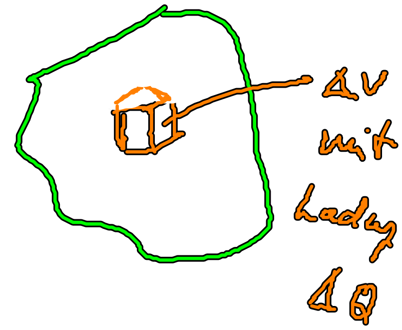
$\vec{v}(\vec{r})$ Vektorfeld



Volume V

Bsp: Ladungsverteilung im Volumen V

$$\rho = \text{Ladungsdichte} = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \rightarrow \frac{dQ}{dV} \equiv \rho(\vec{r})$$

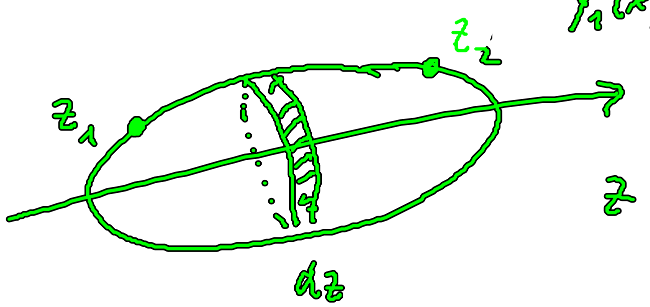


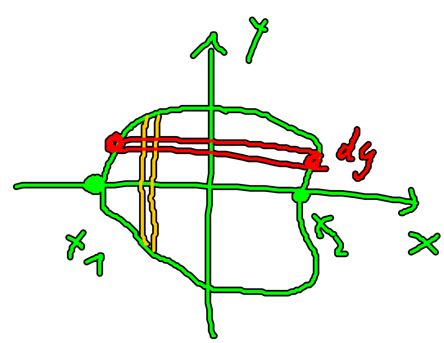
$$\rightsquigarrow \quad Q\Big|_{\text{Ladung in } V} = \int dV\, \rho(\vec{r})$$

Notation $\quad \int dV, \quad \int d^3r, \quad \iiint d^3r, \quad \iiint dV$

Berechnung in kartesischen Koordinaten:

$$\int d^3r\, \phi(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \quad \phi(x,y,z)$$





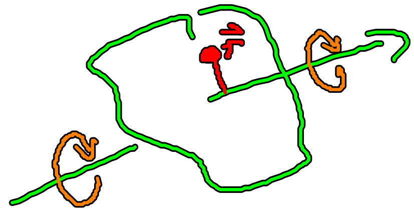
Zum Ausführen d. Integrals sind die Begrenzungsflächen wichtig

$\rightarrow$ Volumenintegral auf 3 Standardintegrale zurückgeführt

b) Beispiele

(i) Trägheitsmoment

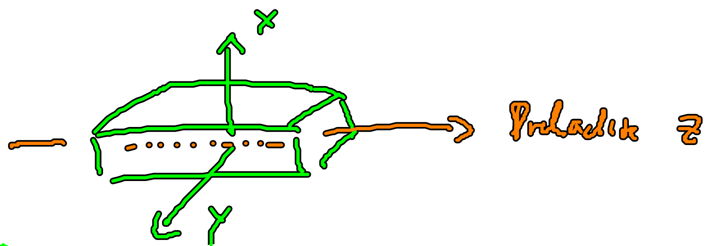
Größe um Drehung zu charakterisieren ist Trägheitsmoment I



$$\rho_m = \frac{dm}{dV}$$

$$I = \int d^3r \; \rho_m(\vec{r}) \cdot \text{Quadrat des Abstands von Drehachse}$$

über den Körper



Quader a, b, c

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \; \rho_m(\vec{r}) \; (x^2 + y^2)$$

wenn bekannt dann berechenbar

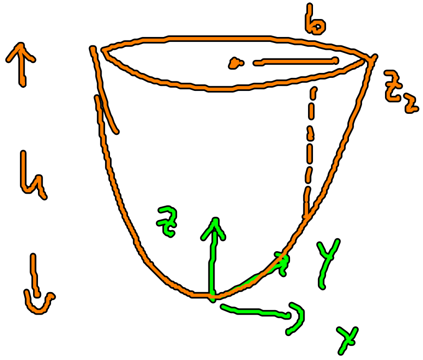
$$\rho(\vec{r}) = \frac{M}{V} \quad \text{Gesamtmasse / Volumen} = \text{konst}$$

$$V = abc$$

überall gleiche Verteilg.

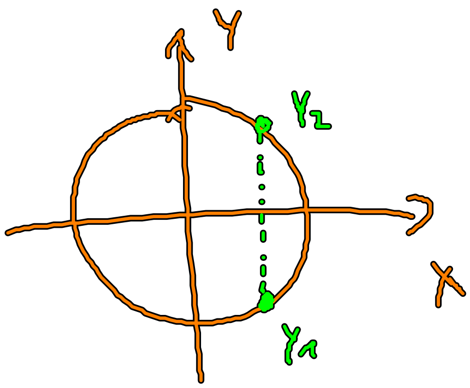
$$= \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

(ii) Volumen Paraboloid



$$z = x^2 + y^2$$

$$V = \int_{-b}^{b} dx \int_{-(b^2-x^2)^{1/2}}^{+(b^2-x^2)^{1/2}} dy \int_{z_1 = x^2+y^2}^{h} dz \; 1 = \underline{\underline{\frac{81}{2}\pi}}$$



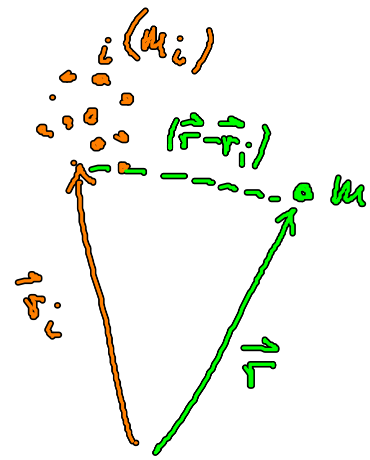
$$(h = b^2)$$

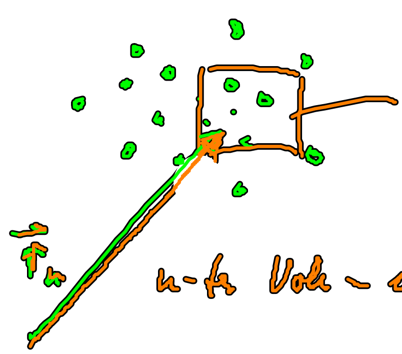
(iii) Gravitationspotential einer Masseverteilung

$$\varphi(\vec{r}) = -\sum_i \frac{G\, m\, m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Gravitationspotential auf Masse m

alle Massepunkte m_i die auf m am Ort $\vec{r}$ wirken





ΔV_n
mit Δm_n

n-te Volumenelement

$$\varphi(\vec{r}) = -Gm \sum_n \frac{\Delta m_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|}\,\frac{\Delta V_n}{\Delta V_n}$$

$$\Delta V_n \to 0 \qquad \equiv \rho_m(\vec{r}\,')$$

$$= -Gm \int dV' \frac{\frac{dm}{dV}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

wieder Volumenintegral

c) Volumenintegrale in beliebigen Koordinaten (u,v,w)

Flächenelement: $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ $\qquad \vec{r} = \vec{r}(u,v,w)$

(in kartesisch $dx\,dy$)

Volumenelement: $dx\,dy\,dz$

in (u,v,w): $\underbrace{\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\cdot\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial w}}$ $\equiv$ Spatprodukt

Volumenelement in gekrümmten Koordinaten

Functionaldeterminante:
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Zylinderkoordinaten: $dV = \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz$

Kugel — " — : $dV = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr$

$$\int d^3r = \underbrace{\int_0^R dr\, r^2}_{\frac{1}{3}R^3} \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

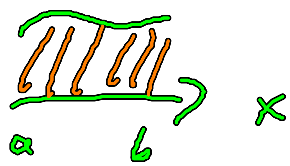
Kugel mit Radius R

$$\left(\begin{array}{l} x = \cos\vartheta \\ \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin\vartheta \\ 0 \to 1 \\ \pi \to -1 \end{array} \right)$$

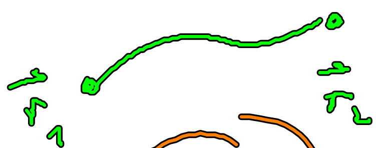
6.4. Kurze Zusammenstellung d. Integrale

5 6

a/ gewöhnliche Integral : $\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dx\, \frac{dF}{dx} = F(b)-F(a)$

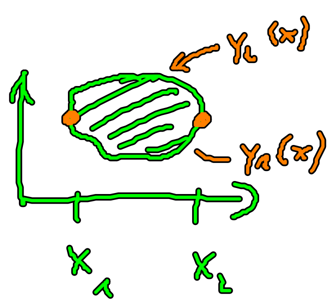


b/ Kurvenlängen : $\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} dr = \int_{t_1}^{t_2} dt\, v(t)$ $\qquad v = |\dot{\vec r}(t)|$



$\vec r(t)$ Parametrisierung

c/ ebene Flächenintegrale



$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, f(x,y)$$

Volumenintegrale analog

bei beiden gehen auch krummlinige Koord. Funktionaldeterminanten beachten.

d/ <u>Oberflächenintegrale</u>

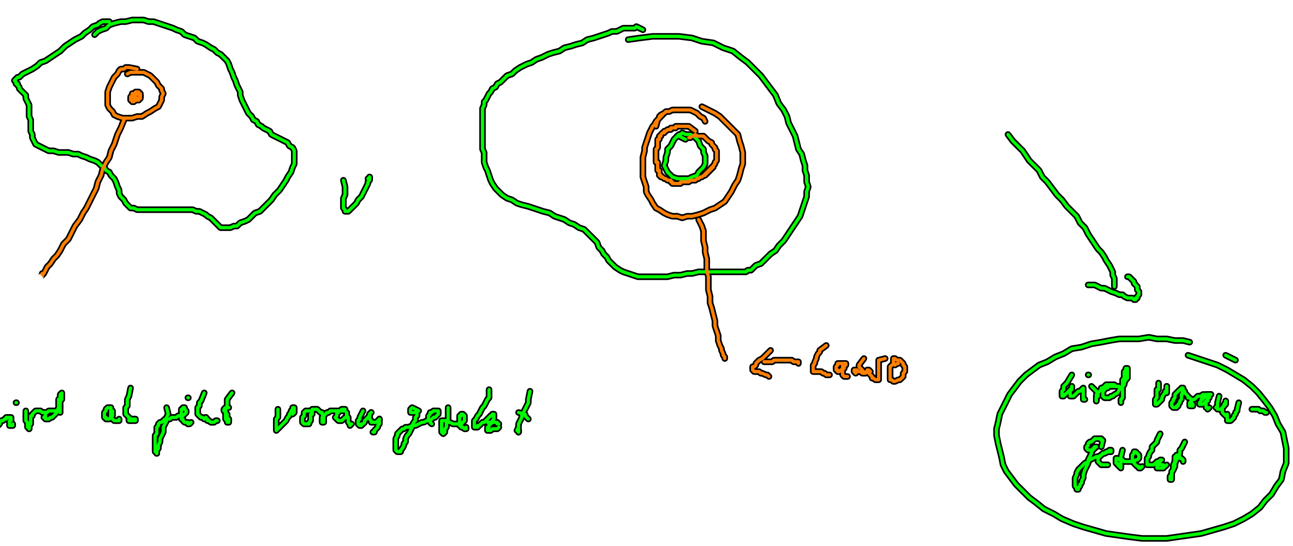
$$\int d\vec A \begin{pmatrix} \times \\ \cdot \end{pmatrix} \vec v(\vec r)$$

$$\iint du\,dv\, \frac{\partial \vec r}{\partial u} \times \frac{\partial \vec r}{\partial v} \begin{pmatrix} \times \\ \cdot \end{pmatrix} \vec v(u,v)$$

Flächeninhalt über $|d\vec A|$

7. Skalar und Vektorpotential, Integralsätze

einfach zusammenhängend heißen Volumina im Raum, wenn jede geschlossene Kurve sich wie ein Lasso auf einen Punkt zusammenziehen läßt



7.1. Darstellung spezieller Vektorfelder

a) wenn $\vec\nabla \times \vec v(\vec r) = 0 \xrightarrow{\text{so}} \vec v(\vec r) = -\vec\nabla \phi(\vec r)$

Ein rotationsfreies Feld kann als Gradientenfeld dargestellt werden

$$\text{wann:} \quad \vec\nabla \times (\vec\nabla \,\cdot\,) \equiv 0 \;\rightarrow\; \vec V(\vec r) \propto \vec\nabla \phi(\vec r)$$

Vorsicht ist Konvention an Mechanik:

$$\left(\begin{aligned} E &= T \mp U \\ \vec F_{mech} &= \pm \vec\nabla U \end{aligned} \right)$$

Darstellung von $\phi(\vec r)$:

berechne einfach: $-\int_0^{\vec r} d\vec r\,' \cdot \vec V(\vec r\,') =$

$$\int_0^{\vec r} d\vec r\,' \cdot \vec\nabla' \phi(\vec r\,') = \int_0^{s} ds' \, \underbrace{\frac{d\vec r\,'(s)}{ds'} \cdot \vec\nabla' \phi(\vec r\,'(s'))}_{\text{Kettenregel}}$$

$$= \int_0^{s} ds' \, \frac{d\phi(\vec r(s'))}{ds'}$$

$$= \phi(\vec r) - \phi(0) \quad \leftarrow \text{Konstante}$$

ϕ wird Potential von $\vec{v}$ genannt und läßt sich darstellen:

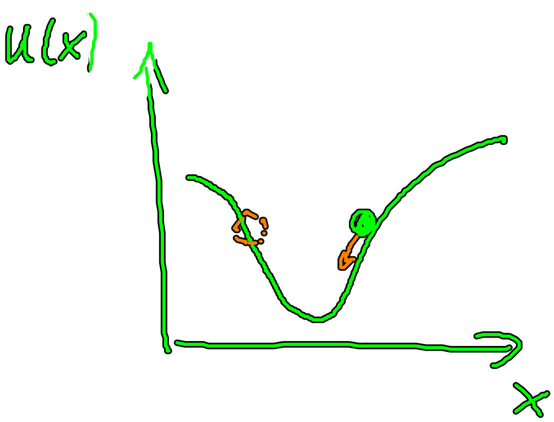
$$\phi(\vec{r}) = -\int_{0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot v(\vec{r}\,') + \text{Konstante}$$

Konstante gibt Eichfreiheit

„umeichen des Potentials"

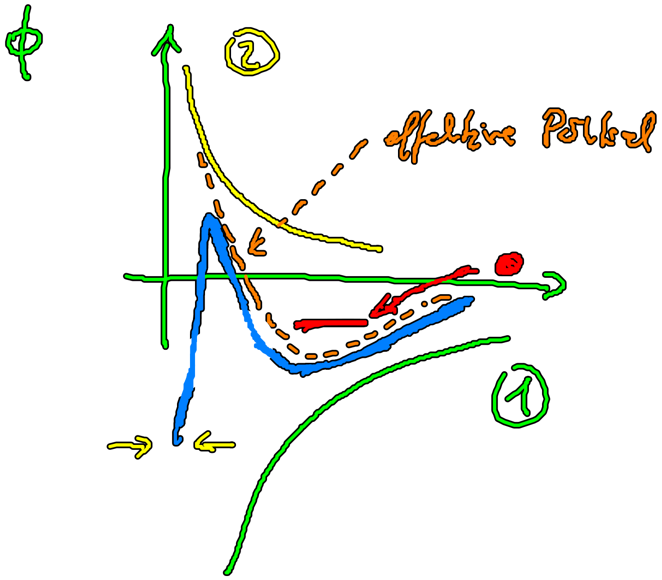
Felder bleiben unverändert $\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi + \cancel{\vec{\nabla}\,\text{Konst}}$

<u>Beispiel</u>: anschauliche Diskussion v. Bahnkurven



Abstand v. Stern

<u>Planetbewegg.</u>: „Ersatzpotential" $\phi(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$



Anziehung d. Stern nach Newton ①

Drehimpuls-beitrag ②

relativistische Korrektur $-\frac{\ell^2}{r^3}$ ③

b) wenn $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r}) = 0 \xrightarrow{\text{so}} \vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$

Ein divergenzfreies Feld kann als Wirbelfeld dargestellt werden

warum: $\vec{v} \propto \vec{\nabla}\times\vec{A}$ folgt aus $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\cdot) \equiv 0$

Darstellung v. $\vec{A}(\vec{r}) = \int_0^1 d\lambda\, \vec{v}(\lambda\vec{r})\times\vec{r}$

c) wenn $\vec{v}(\vec{r})$ im ∞ mindestens mit $\frac{1}{r^2}$ abfällt,

so ist $\vec{v}(\vec{r})$ allein durch seine Wirbel und Quelle,

d.h. durch rot $\vec{v}(\vec{r})$ und div $\vec{v}(\vec{r})$ festgelegt!

wichtig in ED: hier sind Quellen u. Wirbel der Felder $\vec{E}, \vec{B}$ durch Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ und Stromdichte bestimmt $\vec{j}(\vec{r},t)$.

z.B. Elektrostatik

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ damit } \vec{E} \text{ eindeutig festgelegt}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{grad} + \vec{V}_{wirbel}$$

Quelle

$$\vec{V}_{grad} = -\frac{1}{4\pi}\underline{\underline{\vec{\nabla}}}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Wirbel

$$\vec{V}_{wirbel} = \frac{1}{4\pi}\underline{\underline{\vec{\nabla}}}\times\int d^3r' \, \frac{\vec{w}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \vec{\nabla}\cdot\vec{V} \\ \vec{w} &= \vec{\nabla}\times\vec{V} \end{aligned}\right\} \text{ sei gegeben}$$

7.2. Integralsätze

Form v. Integralsätzen:

$\int$ über Ableitg. v. Funktion $=$ Funktionswerte auf Rand d. Gebiets

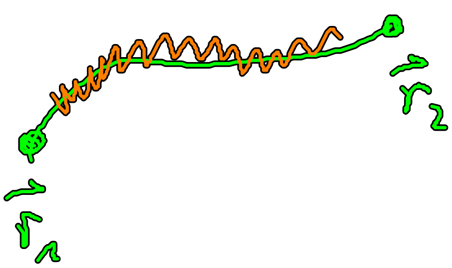
Gebiet (V, A)

Bsp: $$\int_a^b dx\, \frac{dF}{dx} = F(b) - F(a)$$

$$f(x) = \frac{dF}{dx}$$

kann man das verallgemeinern?

a) Integralsatz f. Kurve



$$-\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r \cdot \vec v(\vec r) = \boxed{\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r \cdot \vec\nabla \phi(\vec r) = \phi(\vec r_2) - \phi(\vec r_1)}$$

Rand

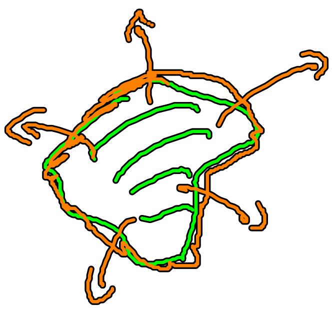
Integral über Kurve kann über Randpunkte ausgedrückt werden.

b) Integralsätze in 2d, 3d

(i) Satz v. Gauß

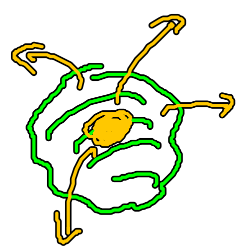
$$\int_V dV\, \vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r}) = \oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{v}(\vec{r})$$

∂V: Oberfläche v. V



<u>Beispiel</u>: Elektrostatik $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

$$\int dV \longrightarrow \oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



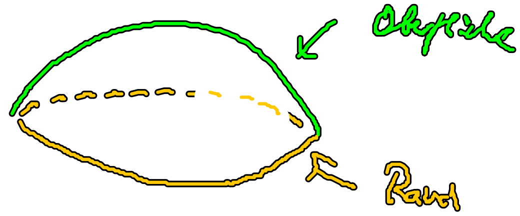
Ladungen sind Quelle des elektr. Feldes

(ii) Satz v. Stokes

$$\int_A d\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r}) = \oint_{\partial A} d\vec{r}\cdot\vec{v}(\vec{r})$$

A mit Rand

∂A (Kurve die OF abschließt)



Oberfläche
Rand