8. Differentialgleichungen

Gesetze d. Physik in Form von Differentialgleichungen

bzw. „Bewegungsgleichungen" (Zeitablauf)

Beispiele: Newtongleichg. $\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = \vec{f}(t,\vec{r})$, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}(t)$

Schrödingergl. $i\hbar\,\partial_t \psi(\vec{r},t) = \hat{H}\,\psi(\vec{r},t)$

Maxwellgleichg.: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

$E, B = f(\vec{r}, t)$

von Neumanngl.: $i\hbar\dot{\hat{\rho}} = [\hat{H},\hat{\rho}] = \hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}$

- Zeit, Ortsableitungen in Gleichungen → Differentialgleichungen

Dgl: → gewöhnliche : Ableitg. nach 1 Variablen $\left(\frac{d}{dt}\right)$
→ partielle : Ableitg nach mehrere Variablen $\left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\times, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Dgl: → lineare : Funktionen linear in $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$
→ nichtlinear : " nichtlinear $\sqrt{\dot{x}}$, $\sin x$

Dgl: → Skalare
→ Vektoren
→ Tensoren
→ Operatoren

8.1. Klassifizierg. gewöhnlicher Dgl.

- betrachte Funktion $x(t)$
- Ordnung der Dgl: die höchste Ableitg. die auftritt

$$\dot{x} = f(t) \quad \rightarrow \quad 1.\ \text{Ordng.}$$

$$\dddot{x}^2 = x \quad \rightarrow \quad 3.\ \text{Ordng.}$$

- explizite Dgl: Dgl. die nach höchster Ableitung umgestellt ist

(i) „i-te Ableitg."

$$x^{(n)} = g(x^{(i)}, t)$$

- implizit $F(x^{(n)}, \dot{x}, t) = 0$
- homogen Dgl. sind Dgl. in denen t nicht explizit vorkommt $\ddot{x} = \dot{x} + f(t)$

↗

dann inhomogen
wenn $f(t) \neq 0$

- gewöhnliche, lineare, explizite Dgl. f. $x(t)$:

$$x^{(n)}(t) + f_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) + \dots f_0(t)\, x(t) = f(t)$$

oft als $\mathcal{L}_n\, x(t) = f(t)$ geschrieben

$\mathcal{L}_n$: Differentialoperator

$$\mathcal{L}_n = \frac{d^n}{dt^n} + f_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots f_0(t)$$

- Gleichungen mit Ableitungen $n > 1$ kann man immer in Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umschreiben:

$$\dot{x} = y_1(t), \quad \ddot{x} = y_2(t) \qquad x^{(n)} = \dot{y}_{n-1}$$

<u>2. Ordng</u> ($\mathcal{L}_2$)

$$\dot{y}_1 + f_1 y_1 + f_0 x = f(t)$$
$$\dot{x} = y_1$$

→ viele 1. Ordnungsgleichungen

(geht auch f. nichtlinear Dgl.)

8.2. Lineare Differentialgleichungen $\underline{\mathcal{L}_n x(t) = f(t)}$

4 grundlegende Tatsachen

(i) $\mathcal{L}_n x(t) = 0$ besitzt n-linear unabhängige Lösungen $(x_1, \dots x_n)$

d.h.: $\sum_n c_n x_n(t) = 0 \Leftrightarrow c_n = 0$

(ii) die allgemeine Lsg. des homogen Problems ist:

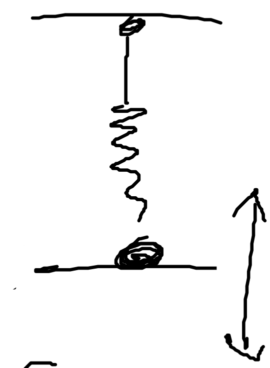
$$x_h(t) = \sum_n c_n x_n(t)$$

n Konstanten die aus Physik bestimmt werden

(iii) $\mathcal{L}_n x(t) = f(t)$ inhomogen Problem wird durch $\underline{\underline{x_i(t)}} = x_h(t) + x_0(t)$ gelöst,

wobei x_h sich oben und x_0 eine spezielle Lsg. d. inhomogenen Problems ist.

(iv) Parameter c_i $(1 \cdots n)$ müssen durch Anfangsbedingungen, Randbedingungen festgelegt werden



Bsp: $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$

$$x_1 = \sin \omega_0 t$$

$$x_2 = \cos \omega_0 t$$

$$x(t) = \underline{\underline{c_1}} \sin \omega_0 t + \underline{\underline{c_2}} \cos \omega_0 t$$

$$x(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = c_2 \cos \omega_0 t \Big|_{t=0} \rightarrow c_2 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \rightarrow \quad v_0 = c_1 \omega_0 \cos \omega_0 t \Big|_{t=0}$$

$$\rightarrow c_1 = \frac{v_0}{}$$

ω_0

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Dgl. 2. Ordng. → zur Lsg. benötigt man 2 AB.

Test f. linear Unabhängigkeit: Wronski – Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \cdots & \dot{x}_n \\ & & \cdots & & \\ x_1^{(n-1)} & & \cdots & & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{linear Unabhängigkeit } \{x_1 \cdots x_n\}$$

Bsp

$$\begin{vmatrix} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \\ \omega_0 \cos \omega_0 t & -\omega_0 \sin \omega_0 t \end{vmatrix} = -\omega_0 \sin^2 \omega_0 t - \omega_0 \cos^2 \omega_0 t$$

$$= -\omega_0 \neq 0$$

8.2.1. Übersicht zu linearen Dgl. 1. Ordng.

$$\dot{x}(t) + g(t)\,x(t) = f(t)$$

(i) homogene Dgl $\qquad \dfrac{dx}{dt} = -g\,x$

$f(t) = 0$

$$\frac{dx}{x} = -g\,dt \qquad \Big| \int$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x'} = \underbrace{-\int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')} \qquad \begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t) &= x \end{aligned}$$

$$\ln x - \ln x_0 = -G(t, t_0)$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -G(t, t_0) \qquad \Big| \exp$$

$$x = x_0\, e^{-G}$$

Lsg. homogen Dgl: $\quad x(t) = x_0 \underbrace{e^{-\int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')}}_{x_1}$

$$x_h = \sum_n c_n x_n(t) \longrightarrow x_0 \equiv c_1$$

(ii) inhomogen Lsg.

$$\dot{x} + g(t)x = f(t)$$

Variation der Konstanten $c_1 \to c_1(t)$

$$x_i(t) = c_1(t)\, x_1(t) \quad \text{Versuch!}$$

Einsetzen: $$\dot{c}_1 x_1 + \underline{\underline{c_1 \dot{x}_1}} + \underline{\underline{g(t)\, c_1 x_1}} = f(t)$$

$$c_1 \big(\underbrace{\dot{x}_1 + g(t)\, x_1}_{=0} \big)$$

x_1 löst homog. Dgl.

$$\dot{c}_1 x_1 = f(t)$$

$$\dot{c}_1 = \frac{f(t)}{x_1(t)} \longrightarrow c_1(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{f(t')}{x_1(t')}$$

$$c_1(t) = \int_{t_0}^{t} dt' f(t')\, e^{\int_{t_0}^{t'} dt'' g(t'')}$$

Die Lsg. d. inhomog. Dgl. lautet:

$$x_i(t) = \left(c_1 e^{-\int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')} + \int_{t_0}^{t} dt'\, f(t')\, e^{\int_{t_0}^{t'} dt''\, g(t'')} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')} \right)$$

↑ bestimmen d. AB

kurzer Abzweig: „Trennung der Variablen" als Methode

(u.U. auch bei nichtlinearen Dgl mgl.)

Dgl sei: $\boxed{\dot{x}(t) = f(x)\, g(t)}$

kann u.U. nichtlinear sein

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\, g(t)$$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}}_{F(x)} = \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')}_{G(t,t_0)}$$

$$F(x) = G(t, t_0)$$

implizite Gl. f. $x(t)$

Bsp $\dot{x} = -x\,t \rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x'} = \int_{t_0}^{t} dt'\,t' \rightarrow \underbrace{\ln \frac{x}{x_0}}_{F(x)} = \underbrace{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)}_{G(t)}$

8.2.2. Übersicht zu Dgl. 2. Ordnung

$$\ddot{x}(t) + g_1(t)\,\dot{x}(t) + g(t)\,x(t) = f(t)$$

Keine ~~schön~~ allgemeine Lsg. angebbar.

(i) wenn homogen Lsg. bekannt $(f \equiv 0)$, so

$x_h = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$, so führt

wird die Variation der Konstanten $c_1(t)$, $c_2(t)$

zu einer Lsg. der inhomogen Dgl.

(durch einsetzen)

(ii) wenn wenigstens eine Lsg. der homog. Dgl. bekannt ist

$x_1(t)$ bekannt, so ist $c_1(t)\,x_1(t) \equiv x_2(t)$

$c_1(t)$ muß bestimmt werden

Einsetzen in Dgl:

$$\ddot{c}_1 x_1 + \underline{\underline{c_1 \ddot{x}_1}} + 2\dot{c}_1 \dot{x}_1$$

$$+ g_1(\dot{c}_1 x_1 + \underline{\underline{c_1 \dot{x}_1}}) + \underline{\underline{g\, c_1 x_1}} = f$$

$$\text{''} \;\underline{\underline{\quad}}\; \text{''} = 0$$ weil x_1 die Dgl. löst.

$$\rightarrow \ddot{c}_1 + \left(2\frac{\dot{x}_1}{x_1} + g_1\right)\dot{c}_1 = \frac{f}{x_1}$$

$$\dot{c}_1 \equiv c$$

$$\rightarrow \dot{c}(t) + \left(\qquad \right) c(t) = \frac{f}{x_1}$$

Siehe oben ist Dgl. 1. Ordnung

und damit lösbar

(iii) Mgl. die Lsg. der homogen Gl. zu finden:

- λ - Ansatz bei konstant Koeffizient $g(t), g_1(t) = g, g_1$

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

Ansatz: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 x_0 e^{\lambda t} + a_1 \lambda x_0 e^{\lambda t} + a_0 x_0 e^{\lambda t} = 0$$

$$\rightarrow \quad \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

Damit hat man $\lambda_{1/2} \rightarrow e^{\lambda_{1/2} t} = x_{1/2}$ gefunden,

also 2 Lsg. !

(i) die Lsg. sind im allg. komplex (Wurzel!)

(ii) mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\to$ hat man 2 linear unabh. Lsg.,

also ein vollst. System

(iii) wenn $\sqrt{D} \to 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

dann $\exists$ nur 1 Lsg. auf diese Art

$\Rightarrow$ $c_1(t)\, e^{\lambda t}$ Ansatz nehmen um x_2 zu bestimmen

von oben: $x_1 \ddot{c}_1 + \underbrace{(2\dot{x}_1 + a_1 x_1)}_{0} \dot{c}_1 = 0$ $\quad x_1 = e^{-\frac{a_1}{2} t}$

$\Rightarrow$ $\ddot{c}_1 = 0 \to \dot{c}_1 = \text{konst}$

$c_1 = c_0 t$

2. linear unabh. Lsg. $\underline{\underline{x_2 = t e^{\lambda t}}}$

- Ansatz über Funktionenreihen (unbekannte Koeffizienten)

z.B. Potenzreihenansatz

$$t^2 \ddot{x} - 3t\dot{x} + 3x = 0$$

$$x_{1,2} = t\,,\ t^3$$

- Ansatz über Variablentrafo

$$t \to s$$

$$t = t(s)\,, \quad s = s(t)$$

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\text{bekannt}} \frac{d}{ds}\, x(t(s)) \Longrightarrow \frac{ds}{dt}\, x'(s)$$

$$\equiv \frac{d}{dt}\, x(t)$$

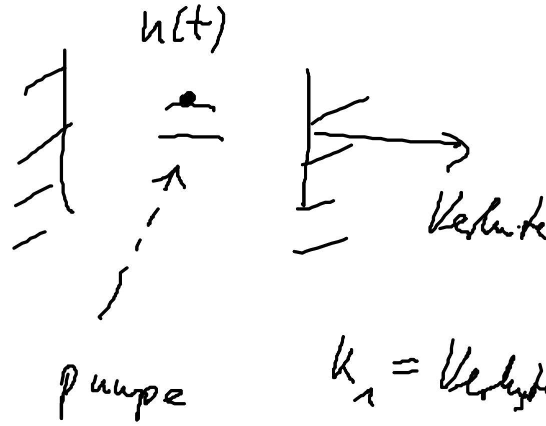
$$\frac{d^2}{dt^2} \longrightarrow \left(\frac{ds}{dt}\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\right)$$

Siehe ÜA.

8.3. Ein Beispiel f. eine nichtlinearen Dgl.

→ Photon in Laser

Laserphoton



$$\dot{n} = -K_1 n - K_2 n^2$$

ist eine nichtlineare Dgl.

$K_1 =$ Verluste − Pumpe

K_1 : > 0 Verluste dominant → Lampenlicht

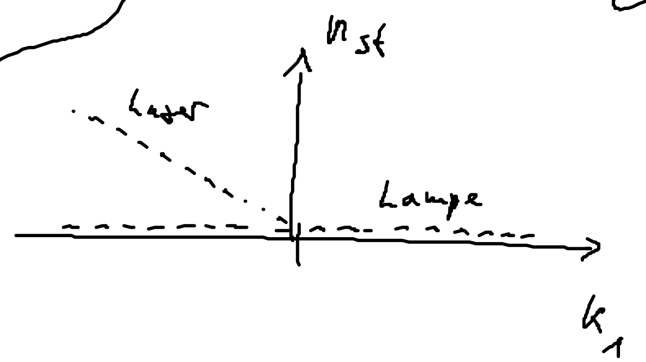
< 0 Pumpe dominant → Laserlicht

K_2 : nichtlinearer Term aufgrund v. Quantenmechanik $K_2 > 0$

Stationäre Lsg. : Lange nach Anschalten ist Photonzahl n = Konstant

$$\dot{n} = 0$$

$$\underbrace{(k_1 + k_2 u_{st})}\, \underbrace{u_{st}}_{\rightarrow\ 0 \text{ Laserphotonen}} = 0$$



$$u_{st} = -\frac{k_1}{k_2} > 0$$

diese Lsg. kann nur $\exists$ wenn $k_1 < 0$

Stabilität der Lsg. ?

Ansatz in Dgl. $u = u_{st} + \underbrace{\xi e^{\lambda t}}_{\text{Störg.}}$

$\lambda < 0 \rightarrow$ Störg. klingt ab

$\lambda > 0 \rightarrow$ Störg. wächst an, diese Lsg. wird nicht realisiert

Einsetzen in Gl.: $\xi^2 \to 0$, λ-Ansatz

$$\lambda = -k_1 - 2k_2 u_{st}$$

man findet, daß f. $k_1 < 0$ (Pumpe dominant ist),

$u_{st} \neq 0$ die stabile Lsg. ist.

$\Rightarrow$ stabil