

8. Differentialgleichungen

gesetz der Physik in Form von Differentialgleichungen

bzw. „Bewegungsgleichungen“ (Zeitablauf)

Beispiel: Newtongleichg. $\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \vec{f}(t, \vec{r})$, $\vec{p} = m \dot{\vec{r}}(t)$

Schrödingergl $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t)$

Maxwellgleichg.: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

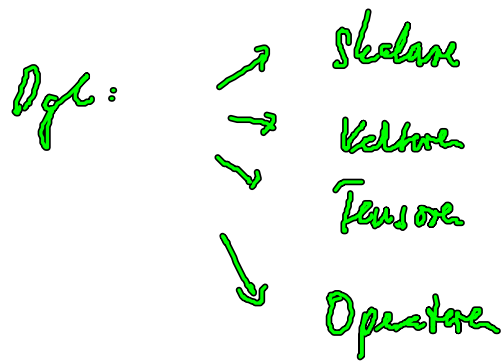
$\vec{E}, \vec{D} = f(\vec{r}, t)$

von Heisenberg: $i\hbar \dot{\hat{p}} = [\hat{H}, \hat{p}] = \hat{H} \hat{p} - \hat{p} \hat{H}$

- Zeit, Ortsableitungen in Gleichungen \rightarrow Differentialgleichungen

Dgl: \rightarrow gewöhnlich: Ableitg. nach 1 Variable ($\frac{d}{dt}$)
 \rightarrow partielle: Ableitg. nach mehreren Variablen
($\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{\nabla} \times$, $\frac{\partial}{\partial z}$)

Dgl: \rightarrow linear: Funktionen linear in $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$
 \rightarrow nichtlinear: „nichtlinear“ \sqrt{x} , $\sin x$



8.1. Klassifizierung gewöhnlicher Dgl.

- betracht Funktion $x(t)$

- Ordnung der Dgl: die höchste Ableitung die auftritt

$$\dot{x} = f(t) \rightarrow 1. \text{ Ordnung.}$$

$$\overset{\dots 2}{\ddot{x}} = x \rightarrow 3. \text{ Ordnung.}$$

- explizite Dgl: Dgl. die nach höchster Ableitung umgestellt ist

(i)
 « i-te Ableitung » $x^{(i)} = g(x^{(i)}, t)$

- implizit $F(x^{(i)}, \dot{x}, t) = 0$

- homogene Dgl. sind Dgl. in denen t nicht explizit vorkommt

$$\ddot{x} = \dot{x} + f(t)$$

↑
dann integrieren
wenn $f(t) \neq 0$

- gewöhnliche, lineare, explizite Dgl. f. $x(t)$:

$$x^{(n)}(t) + f_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + f_0(t)x(t) = f(t)$$

oft als $\mathcal{L}_n x(t) = f(t)$ geschrieben

\mathcal{L}_n : Diff. bild operator

$$\mathcal{L}_n = \frac{d^n}{dt^n} + f_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + f_0(t)$$

- schreiben mit Ableitungen $n > 1$ kann man immer
in Diff. bildgleichungssystem 1. Ordnung umschreiben:

$$\dot{x} = \gamma_1(t), \quad \ddot{x} = \gamma_2(t), \quad x^{(n)} = \dot{\gamma}_{n-1}$$

2. Ordnung
(\mathcal{L}_2)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 + f_1 \gamma_1 + f_0 x &= f(t) \\ \dot{x} &= \gamma_1 \end{aligned}$$

→ viele 1. Ordnungsgleichungen

(gilt auch f. nichtline. Dgl.)

8.2. Lineare Differentialgleichungen $L_n x(t) = f(t)$

4 grundlegende Tatsachen

(i) $L_n x(t) = 0$ besitzt n -linear unabhängige Lösungen
(x_1, \dots, x_n)

$$\text{d.h.: } \sum_n c_n x_n(t) = 0 \iff c_n = 0$$

(ii) die allgemeine Lsg. des homogenen Problems ist:

$$\underline{x(t)} = \sum_n c_n x_n(t)$$

n Konstanten die aus

Physik bestimmt werden

(iii) $L_n x(t) = f(t)$ inhomogenes Problem

wird durch $\underline{x_i(t)} = x_h(t) + x_o(t)$ gelöst,

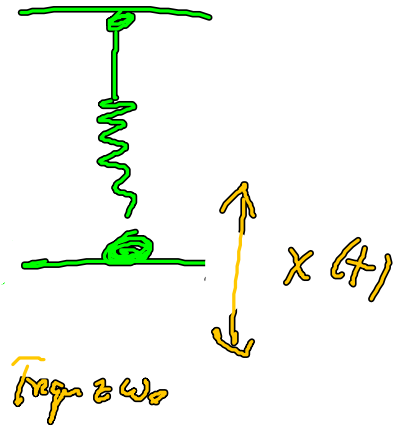
wobei x_h sich oben und x_o eine spezielle Lsg. d. inhomogenen Problems ist.

(iv) Parameter c_i ($i=1, \dots, 4$) müssen durch Anfangsbeding., Randbeding. festgelegt werden

Bsp : $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$

$$x_1 = \sin \omega_0 t$$

$$x_2 = \cos \omega_0 t$$



$$x(t) = \underline{c_1} \sin \omega_0 t + \underline{c_2} \cos \omega_0 t$$

$$x(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = c_2 \cos \omega_0 t \Big|_{t=0} \rightarrow c_2 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \rightarrow \quad v_0 = c_1 \omega_0 \cos \omega_0 t \Big|_{t=0}$$

$$\rightarrow c_1 = \frac{v_0}{\omega_0}$$

ω_0

$$x(t) = \frac{U_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Dgl. 2. Ordng. \rightarrow zw. Lsg. benötigt man 2 AB.

Test f. linear Unabhängigkeit: Wronski-Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dots & \dot{x}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{linear Unabhängigkeit} \\ \{x_1, \dots, x_n\}$$

Bsp

$$\begin{vmatrix} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \\ \omega_0 \cos \omega_0 t & -\omega_0 \sin \omega_0 t \end{vmatrix} = -U_0 \sin^2 \omega_0 t - U_0 \cos^2 \omega_0 t \\ = -\omega_0 \neq 0$$

8.2.1. übermilt zu linear Dgl. 1. Ordng.

$$\dot{x}(t) + g(t)x(t) = f(t)$$

(i) homogene Dgl $\frac{dx}{dt} = -g x$
 $f(t) = 0$

$$\frac{dx}{x} = -g dt \quad | \int$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{x'} = - \int_{t_0}^t g(t') dt'$$

$x(t_0) = x_0$
 $x(t) = x$

$$\ln x - \ln x_0 = -G(t, t_0)$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -G(t, t_0) \quad | \exp$$

$$x = x_0 e^{-G}$$

hom. homog. Dgl: $x(t) = x_0 \underbrace{e^{-\int_{t_0}^t g(t') dt'}}_{x_1}$

$$x_h = \sum_h c_h x_h(t) \rightarrow x_0 \equiv c_1$$

Lineare Dgl.

$$\dot{x} + g(t)x = f(t)$$

Variation der Konstanten $c_1 \rightarrow c_1(t)$

$$x_i(t) = c_1(t)x_1(t) \quad \text{Versuch!}$$

$$\text{Einsetzen: } \dot{c}_1 x_1 + \underbrace{c_1 \dot{x}_1}_{=0} + \underbrace{g(t)c_1 x_1}_{=0} = f(t)$$

$$c_1 (\dot{x}_1 + g(t)x_1)$$

= 0 x_1 löst homog. Dgl.

$$\dot{c}_1 x_1 = f(t)$$

$$\dot{c}_1 = \frac{f(t)}{x_1(t)} \rightarrow c_1(t) = \int_{t_0}^t \frac{f(t')}{x_1(t')} dt'$$

$$c_1(t) = \int_{t_0}^t f(t') e^{-\int_{t_0}^{t'} g(t'') dt''} dt'$$

Die Lsg. d. inhomog. Dgl. lautet:

$$x_i(t) = \left(c_1 e^{-\int_{t_0}^t g(t') dt'} + \int_{t_0}^t dt' f(t') e^{\int_{t_0}^{t'} g(t'') dt''} \cdot e^{-\int_{t_0}^t g(t') dt'} \right)$$



bestimm d. AB

kurzer Abriss: "Trennung der Variablen" als Methode

(u. U. auch bei nichtlin. Dgl. appl.)

Dgl sei: $\boxed{\dot{x}(t) = f(x) g(t)}$



kann u. U. mittels Separation

$$\frac{dx}{dt} = f(x) g(t)$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} = \int_{t_0}^t g(t') dt'$$



$$F(x) = G(t, t_0)$$

implizite f. f. $x(t)$

Bsp $\dot{x} = -x t \rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx'}{x'} = \int_{t_0}^t dt' t' \rightarrow \underbrace{\ln \frac{x}{x_0}}_{F(x)} = \underbrace{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)}_{G(t)}$

§. 2.2. überführt zu Dgl. 2. Ordnung.

$$\ddot{x}(t) + g_1(t) \dot{x}(t) + g_2(t) x(t) = f(t)$$

Keine ~~strenge~~ allgemeine Lsg. angebar.

(i) wenn homogen Lsg. bekannt ($f=0$), so

$$x_h = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \text{ so führt}$$

hier die Variation der Konstanten $c_1(t), c_2(t)$

zu einer Lsg. der inhomogenen Dgl.

(durch Einsetzen)

(ii) wenn wenigstens eine Lsg. der homogenen Dgl. bekannt ist

(iii) Kgl. die Lsg. der homogenen Gl. zu finden.

- λ -Ansatz bei konstant Koeffizient $y(t), y_1(t) = y_2(t)$

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

$$\text{Ansatz: } x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 x_0 e^{\lambda t} + a_1 \lambda x_0 e^{\lambda t} + a_0 x_0 e^{\lambda t} = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

Damit hat man $\lambda_{1/2} \rightarrow e^{\lambda_{1/2} t} = x_{1/2}$ gesucht,

also 2 Lsg.!

(i) die Lsg. sind in allg. komplex (Wurde!)

(ii) mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow$ hat man 2 linear unabh. Lsg.,
also ein vollst. System

(iii) wenn $\sqrt{0} \rightarrow 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

dann \exists us 1 Lsg. auf diese Art

$\downarrow c_1(t) e^{\lambda t}$ Ansatz nehmen um x_2 zu bestimmen

vorher: $x_1 \ddot{c}_1 + \underbrace{(2\dot{x}_1 + a_1 x_1)}_0 \dot{c}_1 = 0$ $x_1 = e^{-\frac{a_1}{2} t}$

$\downarrow \ddot{c}_1 = 0 \rightarrow \dot{c}_1 = \text{konst}$

$c_1 = c_0 t$

2. linear unabh. Lsg. $x_2 = t e^{\lambda t}$

• Ansatz über Fallstrich nehmen (mittlerweile Konstante)

z.B. Potenzreihe ansatz

$$t^2 \ddot{x} - 3t \dot{x} + 3x = 0$$

$$x_{1,2} = t, t^3$$

- Ansatz über Variable trafo

$$t \rightarrow s$$

$$t = t(s), \quad s = s(t)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\text{Jacobian}} \frac{d}{ds} x(t(s)) \implies \frac{ds}{dt} x'(s) \\ \equiv \frac{d}{dt} x(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow \left(\frac{ds}{dt} \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \right)$$

Siehe ÜA.

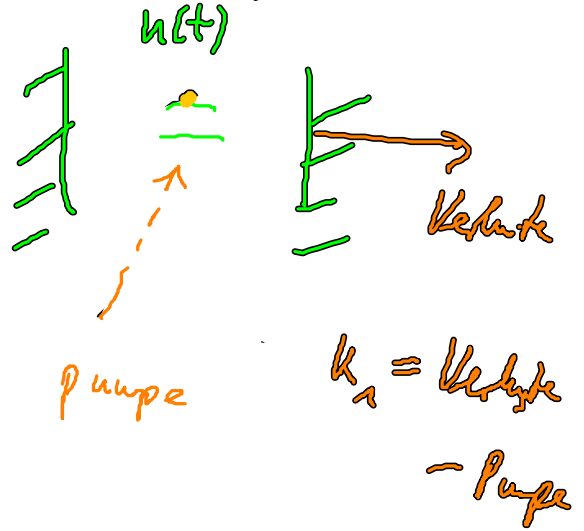
8.3. Ein Beispiel f. ein nichtlineares Pgl.

→ Plots in LaTeX

Laser photon

$$\dot{n} = -k_1 n - k_2 n^2$$

ist ein nichtlineares Dgl.



$k_1 > 0$ Verlust dominant \rightarrow keine Licht

$k_1 < 0$ Pumpe dominant \rightarrow Laserlicht

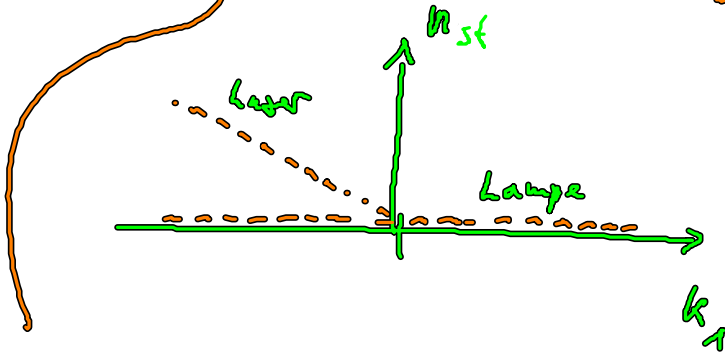
k_2 : nichtlineare Term aufgrund
v. Ramanmedien $k_2 > 0$

Stationäre Lsg. : Laser nach Ausdehnung ist Phot Zahl n
= konstant

$$\dot{n} = 0$$

$$(k_1 + k_2 u_{st}) u_{st} = 0$$

0 Comptonen



$$u_{st} = -\frac{k_1}{k_2} > 0$$

dieses lang. kann es sein wenn $k_1 < 0$

Stabilität des lang.?

Auswahl in Dgl. $u = u_{st} + \underbrace{\xi e^{\lambda t}}_{\text{Störg.}}$

$\lambda < 0 \rightarrow$ Störg. klappt ab

$\lambda > 0 \rightarrow$ Störg. wächst an,

dieses lang. wird unendlich
relativiert

Linienzug ist fl.: $\xi^2 \rightarrow 0$, λ -Auswahl

$$\lambda = -k_1 - 2k_2 u_{st}$$

man findet, dass f. $k_1 < 0$ (Pumpen dom. ist),

$u_{st} \neq 0$ die stabile Gg. ist.

\Rightarrow stabile