

## 2.2 Klassisches Teilchen als Welle

### a) $e^-$ im Atom $\neq$ klass. Teilchen

→ Bohrsches Atommodell (1913)

(i) Quantisierungsbed.  
 $\oint p dq = nh \quad (2.10)$

(ii) Bahnen sind stabil

(iii) Spektrum:  $h\omega = E_n - E_m$

(2.11)

(2.10)  $\xrightarrow{\text{Keis-  
bahn}}$

$E_n = -R_y \frac{1}{n^2} \quad (2.12)$

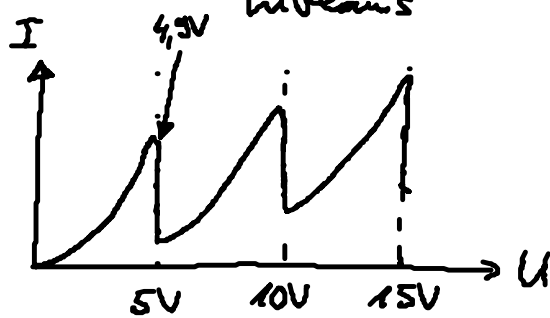
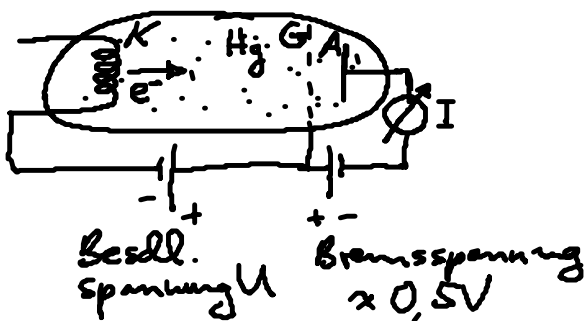
$R_y = \dots$

Coulombkraft:  
 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_n^2} \leftarrow !$

- Bohr-Modell (2.11): - (2.10) ad-hoc Bedingung für klass. Bahnen  
 - klassisch nicht verständlich

• (2.10): verallgemeinert durch Sommerfeld auf Ellipsenbahnen

• Frank-Hertzsch- Stoßversuch (1914) → diskrete Energie-  
 niveaus



Erklärung:  $4,9 \hat{=} \text{erste Anregungsenergie im Hg-Atom}$   
 $\rightarrow e^-$  gibt bei Stoß Energie ab  
 $\rightarrow$  bei  $U \times \text{SeV}$  keine kinet. Energie mehr, um gegen Bremsspannung anzuliegen  $\rightarrow I \downarrow$

b) Drehimpuls-/Richtungs-Quantisierung: Stern-Gerlach-Versuch (1922)

• paramagnetische Atome:

permanentes magn. Moment:  $\mu \sim \underline{L}$  ... Drehimpuls

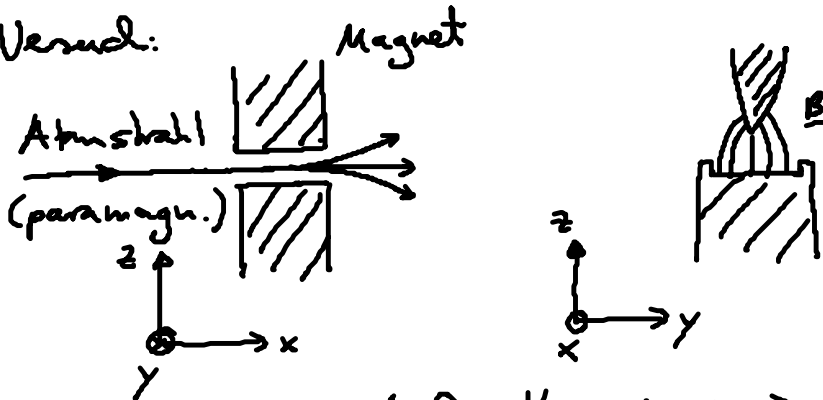
• Kraft auf  $\mu$ :  $\underline{F} = \underline{\nabla} (\mu \cdot \underline{B})$  (2.14)

im inhomogenen B-Feld

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial y} \ll \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\underline{F} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \underline{e}_z \quad (2.15)$$

• Versuch:



Aufspaltung in wenige Strahlen

$\rightarrow \mu_z$  nicht kontinuierlich!

$\rightarrow \boxed{L_z \sim \mu_z \text{ quantisiert!}} \quad (2.16)$

### c) De Brogliesche Hypothese (1923)

- Ziel: einheitliche Beschreibung von Materie & Strahlung / H-Atom verstehen
- also: klass. Teilchen (z.B.  $e^-$ ) haben auch Welleneigenschaften.

$$(E, p) \longleftrightarrow (\omega, \underline{k}) \quad \text{wie bei Photonen [vgl. (2.8)]}$$

de Brogliesche Beziehung für Materiewelle:  
 $\psi(x, t) \sim e^{i(k \cdot x - \omega t)}$

$$E = \hbar \omega$$

$$p = \hbar k$$

(2.17)

}

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

nichtrelativ. Teilchen

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

... Dispersionsrelation

eigentl. de Brogliesche Beziehung

- erste Interpretation: Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{m}$$

- Gruppengeschwindigkeit:  
 [Geschw. eines Wellenpakets, s. (3.23)]

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} \stackrel{(2.17)}{=} \frac{p}{m} \equiv v$$

macht Sinn!

NB:  $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \stackrel{(1.5)}{=} \frac{dE}{dp} \stackrel{\text{klass.}}{=} v$

also:

$$v_{ph} = v_{ph}(k) \quad \dots \text{Dispersion}$$

$$v_{ph} = \frac{1}{2} v$$

→ Dispersion / Zerlauf eines Wellenpakets  
 [s. Kap. 3.1f]

- NB: nichtrelativ. Teilchen:  $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \rightarrow \omega = \omega_0 + \frac{\hbar k^2}{2m}$   
 (ändert  $v = v_{gr}$  nicht!)

- Erklärung für (2.10):  $\oint p dq = nh$   
 stehende Materiewelle im Atom:



$$\oint p dq = \oint \underbrace{p_n}_{\hbar k_n} a_n d\varphi = \underbrace{2\pi a_n}_{= n \lambda_n} \underbrace{p_n}_{\hbar \frac{2\pi}{\lambda_n}} = nh \quad \text{qed}$$

## d) „Quanten Theorie des Atoms“:

- Heisenbergsche Matrizenmechanik (Sommer 1925) (mit Born, Jordan (1926))

dynam. Gln. für „Observablen“, abstrakte Theorie (s. Teil II)

↑  
Matrizen!

- Schrödinger (1926)

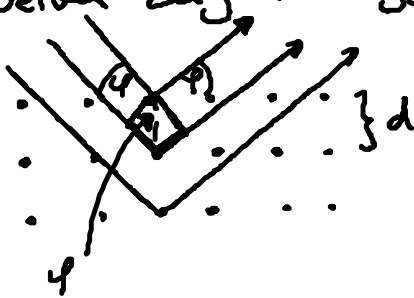
Schrödinger-Gleichung  $\hat{=}$  Wellengleichung für Materiewelle  
 $\hat{=}$  Verallgemeinerung der De-Broglie-Welle auf Teilchen im Potential

„anschaulichere“ Theorie, Hauptinhalt der Vorlesung

- Beide Formulierungen sind äquivalent!

## e) Davissan & Germer (1927)

- $e^-$ -Wellen zeigen Bragg-Reflexion an Ni-Kristall:



Bragg-Reflexion:  $2d \sin \varphi = n \lambda$   
Gangunterschied  
zw. Strahlen

→ (i) Bestätigung von (2.17)

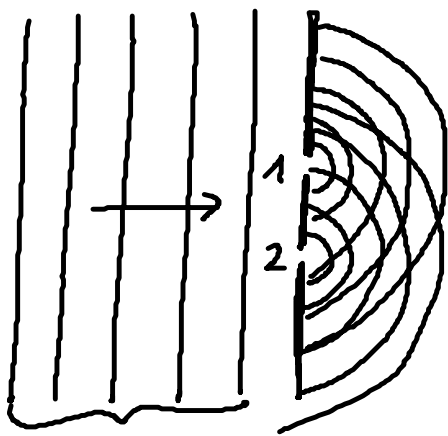
(ii) Materiewellen zeigen Interferenz!

## 2.3 Wellen-Teilchen-Dualismus

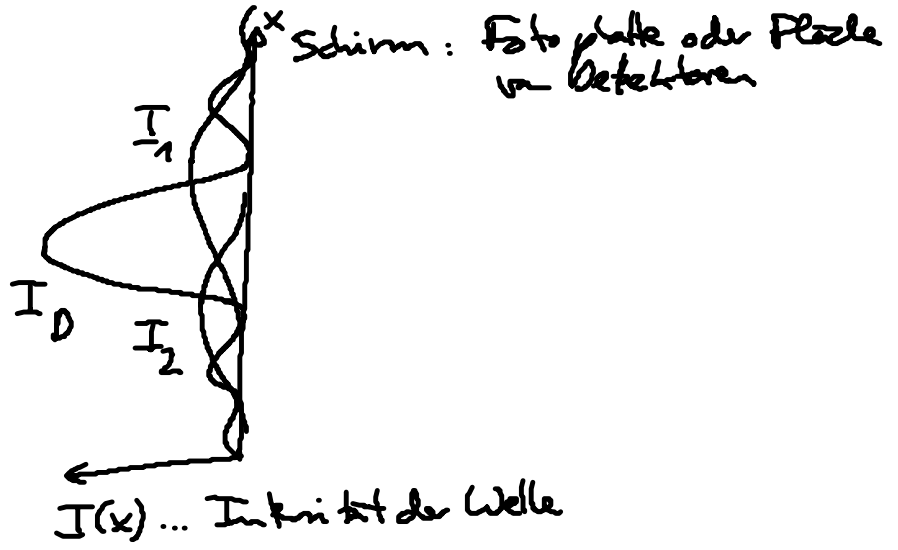
- Bedeutung?

- Gedankenexperiment:

Doppelspaltversuch: → (i) Bedeutung <sup>der</sup> Materiewelle  
(ii) „ „ des Dualismus



Materiewelle  
Intensität  $I_0$



⇒ typisches Spaltbeugungsmuster  $I_0$  für interferierende Wellen

• Variante 1:  $I_0 \rightarrow 0$

Klass. Welle: Beugungsmuster durch gleichmäßige Schwärzung der Platte

Exp. mit  $e^-$ : " " ppt. förmige " " "

[keine  $e^-$  nach dem anderen]

→ (i)  $e^-$  als Teilchen

(ii) Materiewelle regelt wo  $e^-$  auftrifft, also Bedeutung für einzelne  $e^-$

Filmen

• Variante 2: Annahme:  $e^-$  ist klass. Teilchen während der Beugung

→  $e^-$  tritt entweder durch Spalt 1 oder 2

$$\rightarrow I_D(x) = \underbrace{I_1(x)}_{\substack{\text{Spalt 1 auf} \\ \text{+ 2 zu}}} + \underbrace{I_2(x)}_{\substack{\text{Spalt 2 auf} \\ \text{+ 1 zu}}}$$

aber  $I_D(x) \neq I_1(x) + I_2(x)$

(i) Wellencharakter & Interferenz wichtig im Doppelspaltversuch

(ii)  $e^-$  hat keine klass. Bahn mehr

- Realisierung: C. Jönsson (1961), Uni Tübingen  
[Erfindung: Fabrication des Doppelspalts, Nanotechnologie]
- Dualismus gilt für:  $e^-$ ,  $p$ ,  $n$ , ...  $C_{60}$  (Fullerene, Fußballer)