

2.2 Klassisches Teilchen als Welle

a) e^- im Atom \neq klass. Teilchen

→ Bohrsches Atommodell (1913)

(i) Quantisierungsbed.

$$\oint p dq = nh \quad (2.10)$$

(2.11)

(ii) Bahnen sind stabil

(iii) Spektrum: $h\omega = E_n - E_m$

(2.10) $\xrightarrow{\text{Keis-}} \text{bahn}$

$$E_n = -R_y \frac{1}{n^2} \quad (2.12)$$

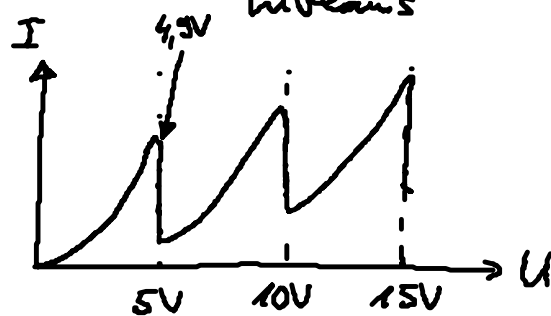
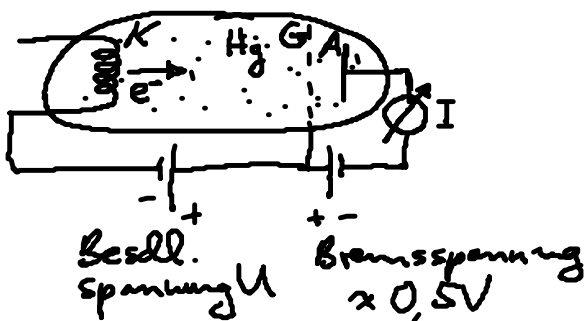
Coulombkraft:
 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_n^2} \leftarrow !$

$$R_y = \dots$$

- Bohr-Modell (2.11): - (2.10) ad-hoc Bedingung für klass. Bahnen
- klassisch nicht verständlich

• (2.10): verallgemeinert durch Sommerfeld auf Ellipsenbahnen

• Frank-Hertzscher-Stoßversuch (1914) → diskrete Energie-
niveaus



Erklärung: $4,9 \hat{=} \text{erste Anregungsenergie im Hg-Atom}$
 $\rightarrow e^-$ gibt bei Stoß Energie ab
 \rightarrow bei $U \times \text{SeV}$ keine kinet. Energie mehr, um gegen Bremsspannung anzuliegen $\rightarrow I \downarrow$

b) Drehimpuls-/Richtungs-Quantisierung: Stern-Gerlach-Versuch (1922)

• paramagnetische Atome:
 permanentes magn. Moment: $\mu \sim \underline{L}$... Drehimpuls

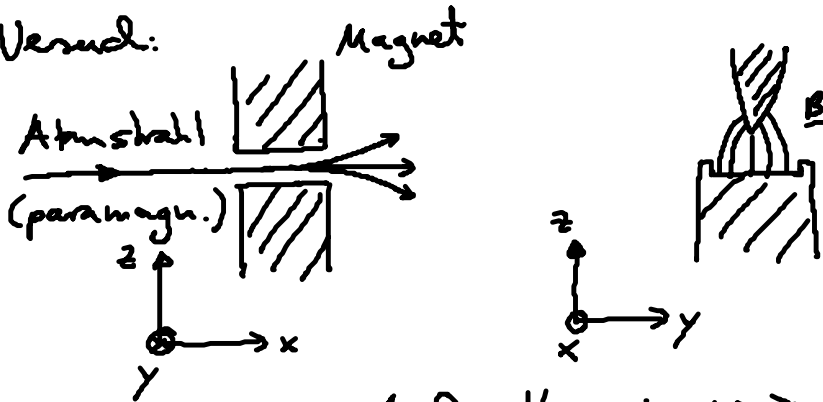
• Kraft auf μ : $\underline{F} = \underline{\nabla} (\mu \cdot \underline{B})$ (2.14)

im inhomogenen
 B-Feld

$$\begin{aligned} B_x, B_y &\ll B_z \\ \frac{\partial B_x}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial y} &\ll \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\underline{F} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \underline{e}_z \quad (2.15)$$

• Versuch:



Aufspaltung in wenige Strahlen

$\rightarrow \mu_z$ nicht kontinuierlich!

$\rightarrow \underline{L}_z \sim \mu_z$ quantisiert! (2.16)

c) De Brogliesche Hypothese (1923)

- Ziel: einheitliche Beschreibung von Materie & Strahlung / H-Atom verstehen
- also: klass. Teilchen (z.B. e^-) haben auch Welleneigenschaften.

$$(E, p) \longleftrightarrow (\omega, \underline{k}) \quad \text{wie bei Photonen [vgl. (2.8)]}$$

de Brogliesche Beziehung für Materiewelle:
 $\psi(x, t) \sim e^{i(k \cdot x - \omega t)}$

$E = \hbar \omega$
 $p = \hbar k$

(2.17)

}

$E = \frac{p^2}{2m}$
 nichtrelativ. Teilchen
 $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$
 ... Dispersionsrelation

eigentl. de Brogliesche Beziehung

- erste Interpretation: Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

- Gruppengeschwindigkeit:
 [Geschw. eines Wellenpakets, s. (3.23)]

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} \stackrel{(2.17)}{=} \frac{p}{m} \equiv v$$

macht Sinn!

NB: $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \stackrel{(2.17)}{=} \frac{dE}{dp} \stackrel{(1.5)}{=} v$ klass.

also:

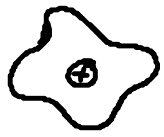
$$v_{ph} = v_{ph}(k) \quad \dots \text{Dispersion}$$

$$v_{ph} = \frac{1}{2} v$$

→ Dispersion / Zerlauf eines Wellenpakets
 [s. Kap. 3.1f]

- NB: nichtrelativ. Teilchen: $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \rightarrow \omega = \omega_0 + \frac{\hbar k^2}{2m}$
 (ändert $v = v_{gr}$ nicht!)

- Erklärung für (2.10): $\oint p dq = nh$
 stehende Materiewelle im Atom:



$$\oint p dq = \oint \underbrace{p_n}_{\frac{h}{\lambda_n}} a_n d\varphi = \underbrace{2\pi a_n}_{= n \lambda_n} \underbrace{p_n}_{\hbar \frac{2\pi}{\lambda_n}} = nh \quad \text{qed}$$

d) „Quanten Theorie des Atoms“:

- Heisenbergsche Matrizenmechanik (Sommer 1925) (mit Born, Jordan (1926))

dynam. Gln. für „Observablen“, abstrakte Theorie (s. Teil II)

↑
Matrizen!

- Schrödinger (1926)

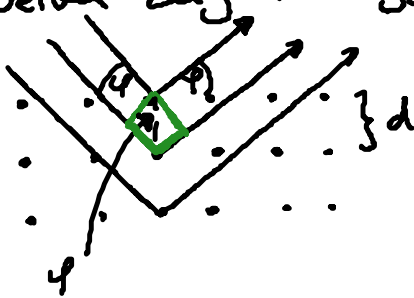
Schrödinger-Gleichung $\hat{=}$ Wellengleichung für Materiewelle
 $\hat{=}$ Verallgemeinerung der De-Broglie-Welle auf Teilchen im Potential

„anschaulichere“ Theorie, Hauptinhalt der Vorlesung

- Beide Formulierungen sind äquivalent!

e) Davissan & Germer (1927)

- e^- -Wellen zeigen Bragg-Reflexion an Ni-Kristall:



Bragg-Reflexion: $2d \sin \varphi = n \lambda$
Gangunterschied
zw. Strahlen

→ (i) Bestätigung von (2.17)

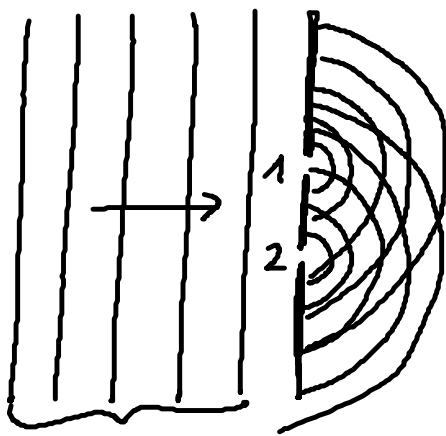
(ii) Materiewellen zeigen Interferenz!

2.3 Wellen-Teilchen-Dualismus

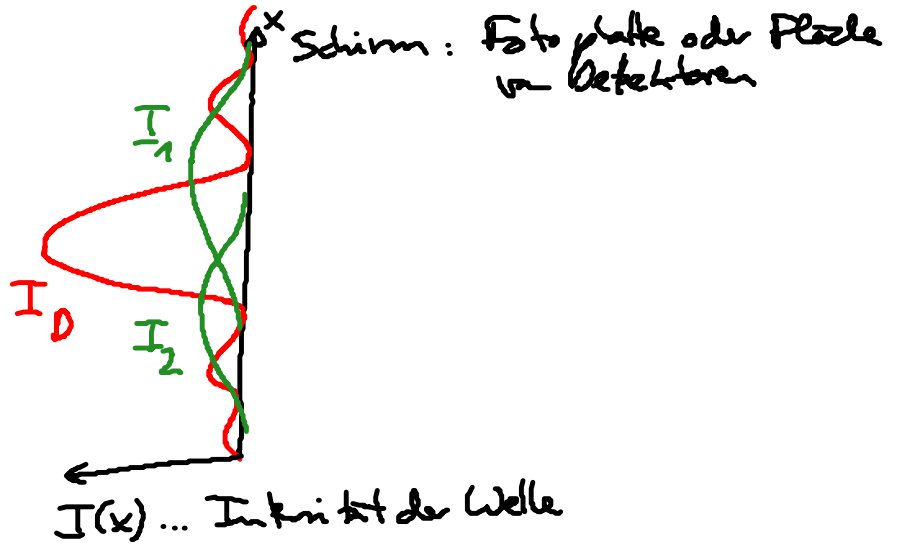
- Bedeutung?

- Gedankenexperiment:

Doppelspaltversuch: → (i) Bedeutung ^{der} Materiewelle
(ii) „ „ des Dualismus



Materiewelle
Intensität I_0



$I(x)$... Intensität der Welle

⇒ typisches Spaltbeugungsmuster I_D für interferierende Wellen

• Variante 1: $I_0 \rightarrow 0$

Klass. Welle: Beugungsmuster durch gleichmäßige Schwärzung der Platte

Exp. mit e^- : " " ppt. förmige " " "

[keine e^- nach dem anderen]

→ (i) e^- als Teilchen

(ii) Materiewelle regelt wo e^- auftrifft, also Bedeutung für einzelne e^-

Filmen

• Variante 2: Annahme: e^- ist klass. Teilchen während der Beugung

→ e^- tritt entweder durch Spalt 1 oder 2

$$\rightarrow I_D(x) = \underbrace{I_1(x)}_{\substack{\text{Spalt 1 auf} \\ \text{+ 2 zu}}} + \underbrace{I_2(x)}_{\substack{\text{Spalt 2 auf} \\ \text{+ 1 zu}}}$$

aber $I_D(x) \neq I_1(x) + I_2(x)$

(i) Wellencharakter & Interferenz wichtig im Doppelspaltversuch

(ii) e^- hat keine klass. Bahn mehr

- Realisierung: C. Jönsson (1961), Uni Tübingen
[Erfindung: Fabrication des Doppelspalts, Nanotechnologie]
- Dualismus gilt für: e^- , p , n , ... C_{60} (Fullerene, Fußballer)