

## 2.3 Welle-Teilchen-Dualismus

• Folgerungen: „Kopenhagener Deutung“ der QT

1. Welle-Teilchen-Dualismus (Bohrsche Komplementarität):

- Beide Eigenschaften sind zur Erklärungen von Experimenten notwendig
- Bei Messung tritt nur eine Eigenschaft in Erscheinung  
→ kein Widerspruch

2. Klassische Bahnen von Teilchen existieren nicht mehr.  
Zwischen 2 Messungen kann keine Bahn festgelegt werden.

3. Statistische Deutung der Materiewelle  $\psi(\mathbf{r}, t)$  (Born, 1926):

$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$  ... Wahrscheinlichkeit, Teilchen bei  $\mathbf{r}$   
im Volumen  $d^3r$  zu finden (2.23)

$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$  ... Wahrscheinlichkeitsdichte

Normierung:  $\int_{\text{gesamtes Volumen}} d^3r |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = 1$  (2.24)

• Welle-Teilchen-Dualismus: auch für Photonen (s. Kap. 2.1)

Achtung: ein Feld ist nicht Wahrscheinlichkeitswelle

Photon folgt aus „Quantisierung“ des em. Feldes  $\hat{=} QED$

(Quanten-Elektrodynamik)

→ s. QM II

## 2.4. Kurze Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

• Def:  $\left. \begin{array}{l} \text{stochastische} \\ \text{Zufalls-} \end{array} \right\} \text{variable} \hat{=} \begin{array}{l} \text{Wertebereich} \\ \& \text{Wahrscheinlichkeits-} \\ \text{verteilung } P(x) \end{array}$  (2.25)

• diskrete Verteilung:  $x = x_1, x_2, \dots, x_N$

$P(x_i)$  ... Wahrscheinlichkeit für  $x_i$

$$\sum_{i=1}^N P(x_i) = 1$$

Bsp: Würfel:  $x$  ... Wurfzahl

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$$

$$P(x_i) = \frac{1}{6}, i = 1, \dots, 6 \rightarrow \sum_{i=1}^6 P(x_i) = 1$$

• kontinuierliche Verteilung:

$$x \in [x_1, x_2]$$

$P(x) dx$  ... Wahrscheinlichkeit für  $[x, x+dx]$

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x) dx = 1$$

$P(x)$  ... Wahrscheinlichkeitsdichte

(2.26)

• Mittel-/Erwartungswert einer Observablen  $f(x)$ :

$$\langle f \rangle = \int f(x) P(x) dx \quad (2.28)$$

Wahrscheinlichkeit mit der  $x$ ,  $f(x)$  vorkommt

Bsp: Würfel:

mittlere Wurfwahl.

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^6 x_i P(x_i)$$

$$= \frac{1}{6} (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5$$

• n. tes Moment von  $P(x)$ :

$$\langle x^n \rangle = \int x^n P(x) dx$$

Mittelwert:  $\langle x \rangle$

Varianz = mittlere quadratische Abweichung von  $\langle x \rangle$

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \text{Var}(x)$$

(2.29)

$$\langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2$$

Standardabweichung:  $\sqrt{\text{Var}(x)}$  ... „Breite“ von  $P(x)$  (2.30)

Bsp: Gaußsche Verteilung: s. Übungen

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1!$$

$$\langle (x-x_0)^n \rangle = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ (n-1)!! \sigma^n, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

• Kenntnis aller  $\langle x^n \rangle \leftrightarrow P(x)$

Beweis: s. Übungen  
→ charakt. Funktion

### 3. Die Schrödinger-Gleichung

• Ges: Wellengleichung für Materie-/Wahrscheinlichkeitswelle

#### 3.1 Die freie Schrödinger-Gleichung (SG)

freies Teilchen, ohne Potential } nicht-relativistisch!

• Forderungen an SG:

1. ebene Welle mit  $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$  als Lsg.

2. Dgl. 1. Ordnung in der Zeit  $\rightarrow \psi(\underline{r}, t)$  durch Anfangsverteilung  $\psi(\underline{r}, t=0)$  bestimmt

3. lineare & homogene Dgl.

$\rightarrow$  Superpositionsprinzip gilt für verschiedene ebene Wellen

( $\rightarrow$  Wellenpaket, s. Kap. 3.2)

4. homogene Dgl.  $\rightarrow |\psi|^2 \dots$  Erhaltungsgröße

$$\cong \int d^3r |\psi(\underline{r}, t)|^2 = 1 \quad (\text{vgl. Kap. 3.4})$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi} \quad (3.1)$$

$$\text{mit } \nabla^2 \cong \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots \text{Laplace-Operator}$$

Kartes. Koord.

• Lsg.? ebene Welle:

$$\psi(\underline{r}, t) = A e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \quad (3.2)$$

$$\xrightarrow{(3.1)} \hbar \omega \psi = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \psi \rightarrow \hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \text{ qed}$$

• Bem.:  $\cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$ ,  $\sin(\dots)$  keine Lsg. von (3.1)!  $\rightarrow$  nur komplexe Welle

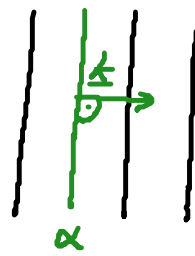
### 3.2 Wellenpakete

• Ziel: feines Teilchen = Wellenpaket!



a) ebene Welle

- Raum-Zeit-Pkte. gleicher Phase  
in (3.2):  $\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t = \alpha \hat{=} \text{Ebene}$



- Phasengeschw.  $v_{ph}$ :

bilde  $\frac{d}{dt} (\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t = \alpha) \rightarrow \underline{k} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = \omega$ ,  $v_{ph} \parallel \underline{k}$

$$\rightarrow v_{ph} = \frac{\omega}{k} \hat{k}, \quad \hat{k} = \frac{\underline{k}}{k}$$

mit  $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \rightarrow$

$$v_{ph} = \frac{\hbar k}{2m} \hat{k} = \frac{p}{2m} \quad (3.3)$$

$$= \frac{v}{2}$$

de Broglie:  
 $p = \hbar k$

- $\psi = A e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \rightarrow$  (i)  $|\psi(\underline{r}, t)|^2 = |A|^2 = \text{konst.}$

... Teilchen überall mit gleicher Wahrsch. Zeit

(ii)  ~~$\iiint d^3r |\psi(\underline{r}, t)|^2 \rightarrow \infty$~~  ... nicht normierbar

~~i.f. weglassen~~

ebene Welle  $\hat{=} idealisierte$   
Teilchenzustand

Abhilfe zu (ii): (1) normierte Wellenpakete

(2) endliches Volumen  $V \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{V}}$

b) Fourier-Transformation (1dim): „Entwicklung nach ebenen Wellen“

• Satz: Geg: stückweise, stetiges  $f(x)$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty$  (\*)

$$\rightarrow \text{Fourier-Transformierte: } \bar{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx}$$

o.B.  $\rightarrow$  Fourier-Entwicklung:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \bar{f}(k) e^{ikx}$$

• Bem (i) „absolute Integrierbarkeit“ (\*) hinreichend, nicht notwendig

(ii) Konvention:  $\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \dots, \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \dots \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \dots$

„normierte“ Eigenfkt. [s. später]

sonst:  $\int dx \dots, \int \frac{dk}{2\pi} \dots$

(iii)  $f(x) \in \mathbb{R} \rightarrow \bar{f}(-k) = \bar{f}^*(k)$

konjugiert-komplex zu  $f(k)$

[Beweis:  $f^*(x) = f(x)$ ]