

4.3 Ehrenfest'sches Theorem

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \quad (4.43)$$

$$\rightarrow \boxed{m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{r} \rangle = - \langle \nabla U(\hat{r}) \rangle} \quad (4.46)$$

• Korrespondenzprinzip (Bohr):

Im makroskop. Grenzfall gilt die klass. Mechanik (4.47)

- hier: makroskop. Körper: $|\Delta r| \ll$ makroskop. Dimensionen
 \cong Wellenl. konzentriert um $\langle r \rangle$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(4.46)} \quad & \langle \nabla U(\hat{r}) \rangle \approx \nabla U(\langle \hat{r} \rangle) \\ \xrightarrow{(4.46)} \quad & \boxed{m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{r} \rangle = - \nabla U(\langle \hat{r} \rangle)} \quad (4.48) \end{aligned}$$

QT \rightarrow klass. Mechanik

4.4. Heisenbergsche Unschärferelation

• Zentrales Prinzip der QT!

• Def: Unschärfe ΔA einer Observable \hat{A}

$$\boxed{(\Delta A)^2 = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} \quad (4.49)$$

Bsp: $\Delta x, \Delta p \dots$ Ort- und Impulsunschärfe

Geg: 2 hermitesche Operatoren \hat{A}, \hat{B} (4.50)
 $\rightarrow \Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$

... allg. Heisenbergsche Unschärferelation

Beweis: mit Hilfe Schwarzsche Ungleichung (4.4)

\rightarrow Übungen

· Diskussion:

(i) $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0 \dots$ „ \hat{A}, \hat{B} kommutieren/vertauschen nicht“

\rightarrow Beide Observable können im Exp. nicht gleichzeitig scharf gemessen werden

Bsp: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \rightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ (4.51)

... Heisenbergsche Unschärferelation

\rightarrow „Klassisches Teilchen“ mit scharfem Ort und Impuls existiert nicht in QT.

NB: Gaußsches Wellenpaket (3.24)/(3.27):

minimale Unschärfe bei $t=0$: $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$

(ii) $[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \rightarrow$ Beide Observable können im Exp. gleichzeitig scharf gemessen werden ($\Delta A = 0 = \Delta B$)

Bsp: $[\hat{x}, U(\hat{x})] = 0, [\hat{p}, \frac{\hat{p}^2}{2m}] = 0$

· Zeit-Energie-Unschärferelation: oft verwendet!

Sei $\hat{B} = \hat{A} \xrightarrow{(4.50)} \Delta A \Delta E \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle|$
 $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$
Energieunschärfe $\stackrel{(4.43)}{=} \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} \right|$

$$\text{mit } \tau_A = \frac{\Delta A}{\left| \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle \right|}$$

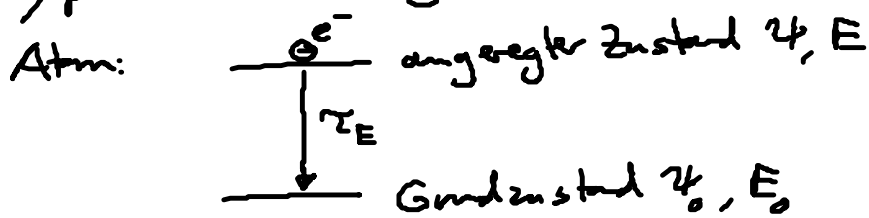
... Zeit auf der sich $\langle \hat{A} \rangle$ um ΔA , also merklich, ändert!

$$\rightarrow \boxed{\tau_A \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}} \quad (4.53)$$

Bsp: (i) $\Delta E = 0$... Energie-Eigenzustand

$\rightarrow \tau_A = \infty$... stationärer Zustand! s. Kap. 5

(ii) typische Anwendung: Lebensdauer



\hat{A} ... „Zustand ψ ist besetzt“ $\rightarrow \tau_E$... mittlere Lebensdauer von ψ
 $[\hat{A} = |\psi\rangle\langle\psi|]$

$$\rightarrow \boxed{\tau_E \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Unschärfe des angeregten Zustandes wegen endl. Lebensdauer

5. Zeitunabhängige SG und Eigenwertprobleme

• formale Lsg. der SG (ist $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$) & vertiefe mathem. Struktur der QT

5.1 Zeitunabhängige SG

• Löse SG durch Separationsansatz: [i.F. $\hat{A} \neq f(t)$]

$$\psi(\underline{r}, t) = g(t) \varphi(\underline{r})$$

in $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$

$$\xrightarrow{\frac{SG}{\psi}} \underbrace{\frac{i\hbar}{g(t)} \frac{\partial}{\partial t} g(t)}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}} = \underbrace{\frac{1}{\varphi(\underline{r})} \hat{H} \varphi(\underline{r})}_{\text{hängt nur von } \underline{r} \text{ ab}} \stackrel{!}{=} E = \text{konst.}$$

(i) $g(t) = e^{-iEt/\hbar}$

(ii) $\hat{H} \varphi(\underline{r}) = E \varphi(\underline{r}) \quad (5.2)$

... zeitunab. SG
 ... Eigenwertgl. von \hat{H}
 mit E ... Energie eigenwert
 $\varphi(\underline{r})$... " eigenfkt./vektoren

[vgl. $\underline{A} \underline{v} = \lambda \underline{v}$... \underline{A} ... Matrix/Tensor
 λ, \underline{v} ... Eigenwerte/-vektoren]

• spezielle Lsg. von SG:

$$\psi(\underline{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \varphi(\underline{r}) \quad (5.3)$$

... stationärer Zustand
 weil $|\psi(\underline{r}, t)|^2 = |\varphi(\underline{r})|^2$!

• Bsp: freies Teilchen: $U(\underline{r}) = 0 \rightarrow \hat{H} \stackrel{(2.34)}{=} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$

EW-Problem: $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(\underline{r}) = E \varphi(\underline{r}) \quad (5.4)$

setze an: $\varphi_{\underline{p}}(\underline{r}) \sim e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p} \cdot \underline{r}}$ in (5.4)

$$\rightarrow \frac{\underline{p}^2}{2m} \cancel{\varphi(\underline{r})} = E \cancel{\varphi(\underline{r})}$$

$$\rightarrow \varphi_{\underline{p}}(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p} \cdot \underline{r}}, \quad E = \frac{\underline{p}^2}{2m} \quad (5.5)$$

spezielle Lsg: $\psi(\underline{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} (\underline{p} \cdot \underline{r} - Et)$

vgl. (3.2) mit $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$!

5.2 Eigenwertgleichungen hermitescher Operatoren: $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$

- Observable in QT!
- vgl. EW-Problem symmetr. Matrix/Tensoren!
- Unterscheidung nötig:

a) \hat{A} mit diskretem EW-Spektrum

$$\hat{A} \psi_n(x) = a_n \psi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Eigenwert
(EW)

Eigenfkt./-vektor

(S.6)

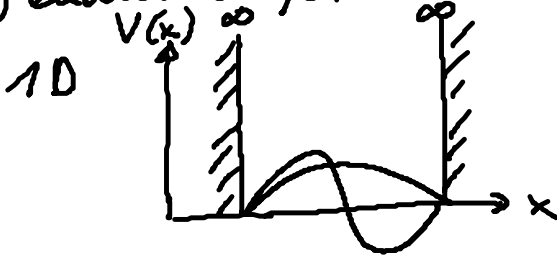
$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \rightarrow (i) a_n \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm} \dots \text{Orthonormierung}$$

Beweis: (i), (ii) ... s. Übung

- Bem: entarteter EW $a_n \hat{=}$ mehrere $\psi_n^{(i)}$ zu gleichem a_n
 $\hat{=}$ „Entartungsraum“
 verwerde Schmidt oder Orthonormalisierungsverfahren $\rightarrow \langle \psi_n^{(i)} | \psi_n^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$
- Bsp: $\hat{A} = \hat{A}$, $\hat{A} \psi_n = E_n \psi_n \rightarrow (E_n, \psi_n) \dots$ diskrete Eigenzustände für Teilchen

(i) endliches Systemvolumen

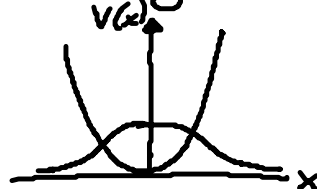


3D:



$$V = L \times L \times L$$

s. Übungen



(ii) $\psi(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$
 harmonischer Oszillator:

b) \hat{A} mit kontinuierliches EW-Spektrum

$$\hat{A} \varphi_\lambda(\underline{r}) = \lambda \varphi_\lambda(\underline{r}) \quad , \quad \lambda \dots \text{kont.} \quad (5.7)$$

$$\hat{A} = \hat{A}^+ \rightarrow \begin{array}{l} \text{(i) } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{(ii) } \langle \varphi_\lambda | \varphi_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda') \dots \text{„Orthonormierung“} \end{array}$$

Beweis: (i) wie in a)
 (ii) \rightarrow Messiah, Nolting

• unendliches Systemvolumen

• Bsp: (i) $\hat{A} = \hat{p}$

$$\hat{p} \varphi_p(\underline{r}) \stackrel{(3.27)}{=} \frac{\hbar}{i} \nabla \varphi_p(\underline{r}) = p \varphi_p(\underline{r}) \quad (5.8)$$

$$\rightarrow \varphi_p(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot \underline{r}}$$

... $p \dots$ kont. Impuls

Orthonormierung:

$$\langle \varphi_p | \varphi_{p'} \rangle = \delta(p - p') \quad (5.9)$$

Beweis: $\int \frac{d^3r}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) \cdot \underline{r}} = \delta(p - p')$

\rightarrow Fouriertrafo. = Entw. nach Impuls eigenfkt.

Vorteil: \hat{p} wirkt als Zahl im Impulsraum