

## 5.2 Eigenwertgl. hermitescher Operatoren: $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$

a)  $\hat{A}$  mit diskretem EW-Spektrum

$$\hat{A}\varphi_n = a_n \varphi_n \quad (5.6)$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $\in \mathbb{R}$   $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$

→ endl. Systemvolumen

b)  $\hat{A}$  mit kont. EW-Spektrum

$$\hat{A}\varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda(x)$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $\in \mathbb{R}$   $\langle \varphi_\lambda | \varphi_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda')$

→ unendl. Systemvolumen

• Bsp: (i)  $\hat{A} = \hat{p} \rightarrow \varphi_p(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot x}$ ,  $\langle \varphi_p | \varphi_{p'} \rangle = \delta(p - p')$

(ii)  $\hat{A} = \hat{x}$  (1D):

$$\hat{x} \varphi_{x_0}(x) = x \varphi_{x_0}(x) \stackrel{!}{=} x_0 \varphi_{x_0}(x) \quad (5.10)$$

$$\rightarrow \varphi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$$

mit  $\langle \varphi_{x_0} | \varphi_{x_0'} \rangle = \delta(x_0 - x_0')$  (5.11)

$$\int dx \delta(x - x_0) \delta(x - x_0')$$

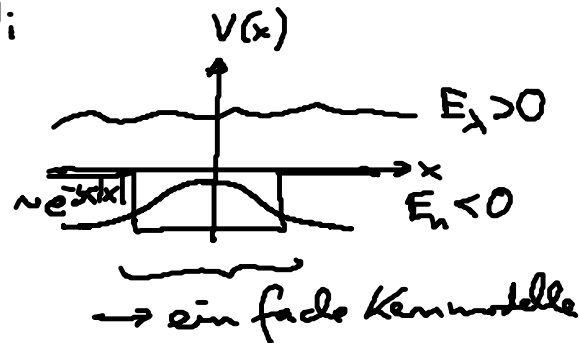
### c) $\hat{A}$ mit diskretm & kont. EW-Spektrum:

• Bsp.  $\hat{A} = \hat{H}$

(i) Potentialtopf mit endlicher Tiefe (1D):

$E_n \leq 0$  .. gebundene, diskrete Zustände

$E_\lambda > 0$  .. ungebundene, kont. Zustände  
= Streuzustände!



(ii) H-Atom

## 5.3 Vollständigkeit

• Entwicklung von  $\psi(\underline{r}, t)$  nach Eigenfkt. von  $\hat{A}$

[vgl. " " Vektor  $\underline{v}$  " Eigenvektoren  $\underline{e}_i$  von Matrix/Tensor:  $\underline{A}$   
 $\underline{v} = v_i \underline{e}_i$ ]

### a) $\hat{A}$ mit diskretm EW-Spektrum

- Satz: Die Eigenfunktionen  $\{\varphi_n\}$  eines hermiteschen Operators können ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) bilden. D.h. für jedes  $f(\underline{r}) \in L^2$  (5.12) gilt die Entwicklung:

$$f(\underline{r}) = \sum_n c_n \varphi_n(\underline{r}) \quad \text{mit } c_n = \langle \varphi_n | f \rangle$$

Beweis:  $\langle \varphi_n | \sum_m c_m \varphi_m \rangle$   
 $= \sum_m c_m \underbrace{\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle}_{\delta_{nm}} = c_n$

• Parselvalsches Theorem:

$$\text{Sei } \psi_1(\underline{r}) = \sum_n c_n \varphi_n(\underline{r}), \quad \psi_2(\underline{r}) = \sum_m d_m \varphi_m(\underline{r}) \quad (5.13)$$

$$\rightarrow \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum_n c_n^* d_n$$

Beweis: selber mit  $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$

insbes. gilt:  $\langle \psi | \psi \rangle = \sum_n |c_n|^2 = 1!$  (S.14)

• Satz: Ein VONS erfüllt die Vollständigkeitsrelation. (S.15)

$$\sum_n \varphi_n^*(r') \varphi_n(r) = \delta(r-r')$$

Beweis:  $f(r) = \sum_n c_n \varphi_n(r) \stackrel{(S.12)}{=} \sum_n \left[ \int d^3r' \varphi_n^*(r') f(r') \right] \varphi_n(r)$

$$= \int d^3r' \underbrace{\sum_n \varphi_n^*(r') \varphi_n(r)}_{=\delta(r-r') \text{ ged}} f(r')$$

• Beachte: Observable = hermitesches  $\hat{A}$  mit VONS als Eigenfkt.

wichtig für Messprozess, s. Kap. 6!

b)  $\hat{A}$  mit kont. EW-Spektrum:

• Beachte:  $\varphi_\lambda(r) \notin L^2$ , wegen  $\langle \varphi_\lambda | \varphi_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda-\lambda')$  [s. (S.7)]

• trotzdem:

Satz: Eigenfktn.  $\varphi_\lambda(r)$  einer Observablen  $\hat{A}$  bilden ein VONS für  $f(r) \in L^2$

$$f(r) = \int d\lambda c(\lambda) \varphi_\lambda(r) \quad \text{mit } c(\lambda) = \langle \varphi_\lambda | f \rangle$$
 (S.16)

Beweis:  $= \langle \varphi_\lambda | \int d\lambda' c(\lambda') \varphi_{\lambda'}(r) \rangle$

$$= \int d\lambda' c(\lambda') \underbrace{\langle \varphi_\lambda | \varphi_{\lambda'} \rangle}_{\delta(\lambda-\lambda')}$$

$$= c(\lambda) \text{ ged}$$

• Bsp: Fourierentw.  $\leftrightarrow$  Impulseigenfkt. s. (S.8)

$$f(r) = \int d^3p \bar{f}(p) \varphi_p(r)$$

mit  $\varphi_p(r) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot r}$  und  $\bar{f}(p) = \langle \varphi_p | f \rangle$  (S.17)

$$= \int d^3r \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot r} f(r)$$

- Vollständigkeitsrelation:

$$\boxed{\int d\lambda \varphi_\lambda^*(\underline{r}') \varphi_\lambda(\underline{r}) = \delta(\underline{r}-\underline{r}')} \quad (5.18)$$

Beweis: selber

Bsp: Impulseigenfktn:

$$\int d^3 p \varphi_p^*(\underline{r}') \varphi_p(\underline{r}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot (\underline{r}-\underline{r}')} = \delta(\underline{r}-\underline{r}')! \quad (5.19)$$

- Parsevalsches Theorem:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_i(\underline{r}) &= \int d\lambda c_i(\lambda) \varphi_\lambda(\underline{r}) \quad i=1,2 \\ \rightarrow \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= \int d\lambda c_1^*(\lambda) c_2(\lambda) \end{aligned}} \quad (5.20)$$

Beweis: selber

NB: verschiedene Wege  $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$  zu berechnen!

## 5.4. Zeitentwicklung eines Zustandes

- Darstellung für diskretes EW-Spektrum von  $\hat{H}$ :

$$\begin{aligned} \text{allg. Anfangszustand: } \psi(\underline{r}, 0) &\stackrel{\text{voos}}{=} \sum_n c_n \varphi_n(\underline{r}), \quad \sum_n |c_n|^2 = 1 \\ \text{mit } \hat{H} \varphi_n(\underline{r}) &= E_n \varphi_n(\underline{r}) \quad \text{und } c_n = \langle \varphi_n | \psi(\underline{r}, 0) \rangle \\ \rightarrow \text{Zeitentwicklung:} & \\ \psi(\underline{r}, t) &\stackrel{(5.3)}{=} \sum_n c_n e^{-i E_n t / \hbar} \varphi_n(\underline{r}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Beweis:  $\psi(\underline{r}, t)$  Lsg. der SG?

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_n c_n \underbrace{E_n}_{= \hat{H} \varphi_n(\underline{r})} e^{-i E_n t / \hbar} \varphi_n(\underline{r}) = \hat{H} \underbrace{\sum_n c_n e^{-i E_n t / \hbar} \varphi_n(\underline{r})}_{\psi(\underline{r}, t)} = \hat{H} \psi \quad \text{qed}$$

• Zeitentwicklung:

$$\text{Löse } \hat{A}\psi_n = E_n\psi_n \rightarrow \psi(x,t)$$

## 6. Meßprozeß in der QT

• Meßprozeß:

3. Beobachter  $\leftrightarrow$  2. Meßapparatur  $\leftrightarrow$  1. System

Klass. Physik: Komponenten beeinflussen sich nicht

QT: Ww von 1 & 2 verändert System

Bsp: Doppelspalt exp.

### 6.1 QT-Meßprozeß

(i) einzelne Messung  $\rightarrow$  Meßwert

(ii) Mittelung über viele Einzelmessungen an identisch präparierten Systemen (Ensemble)

$\rightarrow$  Erwartungswert  
 $\langle \hat{A} \rangle$   
(s. Kap. 4.2)

Bsp: Beugung am Doppelspalt:

(ii) Beugung vieler  $e^- \rightarrow \langle x^2 \rangle, \Delta x$ , bestimmt durch Spaltbeugungsfkt =  $|\psi(x)|^2$

(i) Beugung eines  $e^- \rightarrow$  Lokale Schwärzung des Strahls  
 $\hat{=}$  Ortsmessung  $x_0$

offbar: Änderung von  $\psi(x) \rightarrow \delta(x-x_0)$