5.2 Eigenwertgl. hermitescher Operatoren: $\hat{A}^+ = \hat{A}$

a) $\hat{A}$ mit diskretem EW-Spektrum

$$\hat{A}\varphi_n = a_n \varphi_n \qquad (5.6)$$

$a_n \in \mathbb{R}$, $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$

$\longrightarrow$ endl. Systemvolumen

b) $\hat{A}$ mit kont. EW-Spektrum

$$\hat{A}\varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda(\underline{r})$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \varphi_\lambda | \varphi_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda')$

$\longrightarrow$ unendl. Systemvolumen

- Bsp: (i) $\hat{A} = \hat{\underline{p}} \longrightarrow \varphi_{\underline{p}}(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$, $\langle \varphi_{\underline{p}} | \varphi_{\underline{p}'} \rangle = \delta(\underline{p}-\underline{p}')$

(ii) $\hat{A} = \hat{x}$ (1D):

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}\varphi_{x_0}(x) &= x\varphi_{x_0}(x) \overset{!}{=} x_0 \varphi_{x_0}(x) \\ \longrightarrow \varphi_{x_0}(x) &= \delta(x-x_0) \end{aligned}} \qquad (5.10)$$

mit $\boxed{\langle \varphi_{x_0} | \varphi_{x_0'} \rangle = \delta(x_0 - x_0')}$ (5.11)

$\int dx\, \delta(x-x_0)\,\delta(x-x_0')$

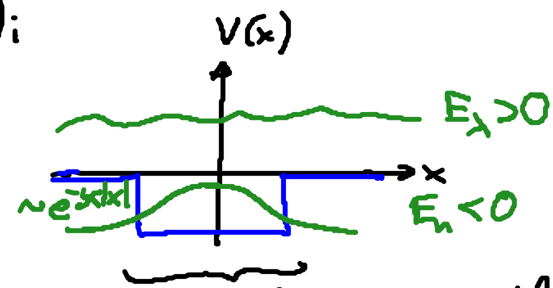
c) $\hat{A}$ mit diskretem & kont. EW-Spektrum:

- Bsp. $\hat{A} = \hat{H}$

  (i) Potentialtopf mit endlicher Tiefe (10):

  $E_n \leq 0$ .. gebundene, diskrete Zustände

  $E_\lambda > 0$ .. ungebundene, kont. Zustände = Streuzustände!



→ einfache Kernmodelle

  (ii) H-Atom

5.3 Vollständigkeit

- Entwicklung von $\psi(\underline{r}, t)$ nach Eigenfkt. von $\hat{A}$

[vgl. " " Vektor $\underline{v}$ " Eigenvektoren $\underline{e}_i$ von Matrix/Tensor: $\underline{\underline{A}}$
$\underline{v} = v_i \underline{e}_i$]

a) $\hat{A}$ mit diskretem EW-Spektrum

- Satz: Die Eigenfunktionen $\{\varphi_n\}$ eines hermiteschen Operators können ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) bilden. D.h. für jedes $f(\underline{r}) \in L^2$ gilt die Entwicklung:

$$\boxed{f(\underline{r}) = \sum_n c_n \varphi_n(\underline{r}) \qquad \text{mit} \quad c_n = \langle \varphi_n | f \rangle} \tag{5.12}$$

Beweis: $\langle \varphi_n | \sum_m c_m \varphi_m \rangle$

$$= \sum_m c_m \underbrace{\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle}_{\delta_{nm}} = c_n$$

- Parsevalsches Theorem:

$$\boxed{\text{Sei } \psi_1(\underline{r}) = \sum_n c_n \varphi_n(\underline{r}), \quad \psi_2(\underline{r}) = \sum_m d_m \varphi_m(\underline{r}) \qquad \longrightarrow \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum_n c_n^* d_n} \tag{5.13}$$

Beweis: selber mit $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$

insbes. gilt: $\underbrace{<|\psi|^2>}_{<\psi|\psi>=} = \sum_n |c_n|^2 = 1$! (5.14)

• Satz: $\boxed{\text{Ein VONS erfüllt die Vollständigkeitsrelation: } \sum_n \varphi_n^*(\underline{r}')\varphi_n(\underline{r}) = \delta(\underline{r}-\underline{r}')}$ (5.15)

Beweis: $f(\underline{r}) = \sum_n c_n \varphi_n(\underline{r}) \overset{(5.12)}{=} \sum_n \left[\int d^3r' \varphi_n^*(\underline{r}') f(\underline{r}')\right] \varphi_n(\underline{r})$

$= \int d^3r' \underbrace{\sum_n \varphi_n^*(\underline{r}')\varphi_n(\underline{r})}_{=\delta(\underline{r}-\underline{r}')} f(\underline{r}')$ qed

• Beachte: $\boxed{\text{Observable = hermitesches } \hat{A} \text{ mit VONS als Eigenfkt.}}$

wichtig für Meßprozeß, s. Kap. 6!

b) $\hat{A}$ mit kont. EW-Spektrum:

• Beachte: $\varphi_\lambda(\underline{r}) \notin L^2$, wegen $<\varphi_\lambda|\varphi_{\lambda'}> = \delta(\lambda-\lambda')$ [s. (5.7)]

• trotzdem:

Satz: Eigenfktn. $\varphi_\lambda(\underline{r})$ einer Observablen $\hat{A}$ bilden ein VONS für $f(\underline{r}) \in L^2$

$f(\underline{r}) = \int d\lambda\, c(\lambda)\varphi_\lambda(\underline{r})$ mit $c(\lambda) = <\varphi_\lambda|f>$ (5.16)

Beweis: $= <\varphi_\lambda| \int d\lambda' c(\lambda')\varphi_{\lambda'}(\underline{r})>$

$= \int d\lambda' c(\lambda') \underbrace{<\varphi_\lambda|\varphi_{\lambda'}>}_{\delta(\lambda-\lambda')}$

$= c(\lambda)$ qed

• Bsp: Fourierentw. $\longleftrightarrow$ Impulseigenfkt. s. (5.8)

$$f(\underline{r}) = \int d^3p\, \tilde{f}(\underline{p})\varphi_p(\underline{r})$$

mit $\varphi_p(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$ und $\tilde{f}(\underline{p}) = <\varphi_p|f>$ (5.17)

$$= \int d^3r \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}} f(\underline{r})$$

- Vollständigkeitsrelation:

$$\boxed{\int d\lambda\, \varphi^*_\lambda(\underline{r}')\, \varphi_\lambda(\underline{r}) = \delta(\underline{r}-\underline{r}')} \qquad (5.18)$$

Beweis: selber

Bsp: Impulseigenfktn.:

$$\int d^3p\, \varphi_p^*(\underline{r}')\,\varphi_p(\underline{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')} = \delta(\underline{r}-\underline{r}')\,! \qquad (5.19)$$

- Parsevalsches Theorem:

$$\boxed{\begin{aligned} &\psi_i(\underline{r}) = \int d\lambda\; c_i(\lambda)\,\varphi_\lambda(\underline{r}) \qquad i = 1,2 \\ &\longrightarrow \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int d\lambda\; c_1^*(\lambda)\, c_2(\lambda) \end{aligned}} \qquad (5.20)$$

Beweis: selber

NB: verschiedene Wege $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ zu berechnen!

5.4. Zeitentwicklung eines Zustandes

- Darstellung für diskretes EW-Spektrum von $\hat{A}$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{allg. Anfangszustand: } \psi(\underline{r},0) \overset{\text{VONS}}{=} \sum_n c_n \varphi_n(\underline{r}), \quad \sum_n |c_n|^2 = 1 \\ &\qquad \text{mit } \hat{A}\varphi_n(\underline{r}) = E_n \varphi_n(\underline{r}) \qquad \text{und } c_n = \langle \varphi_n | \psi(\underline{r},0)\rangle \\ &\longrightarrow \text{Zeitentwicklung:} \\ &\qquad \psi(\underline{r},t) \underset{(5.3)}{=} \sum_n c_n\, e^{-iE_n t/\hbar}\, \varphi_n(\underline{r}) \end{aligned}} \qquad (5.21)$$

Beweis: $\psi(\underline{r},t)$ Lsg. der SG?

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_n c_n E_n\, e^{-iE_n t/\hbar}\, \varphi_n(\underline{r}) = \hat{A} \underbrace{\sum_n c_n\, e^{-iEt/\hbar}\, \varphi_n}_{\psi(\underline{r},t)} = \hat{A}\psi \quad \text{qed}$$

$$= \hat{A}\varphi_n(\underline{r})$$

- Zeitentwicklung:

$$\boxed{\text{Löse } \hat{A}\varphi_n = E_n \varphi_n \longrightarrow \psi(\underline{r},t)}$$

6. Meßprozeß in der QT

- Meßprozeß:

3. Beobachter $\longleftrightarrow$ 2. Meßapparatur $\longleftrightarrow$ 1. System

Klass. Physik: Komponenten beeinflussen sich nicht

QT: Ww von 1 & 2 verändert System

Bsp: Doppelspalt exp.

6.1 QT-Meßprozeß

(i) einzelne Messung $\longrightarrow$ Meßwert

(ii) Mittelung über viele Einzelmessungen an identisch präparierten Systemen (Ensemble) $\longrightarrow$ Erwartungswert $\langle \hat{A} \rangle$ (s. Kap. 4.2)

Bsp: Beugung am Doppelspalt:

(ii) Beugung vieler e^- $\longrightarrow$ $\langle \hat{x} \rangle$, Δx bestimmt durch Spaltbeugungsfkt $= |\psi(x)|^2$

(i) Beugung eines e^- $\longrightarrow$ lokale Schwärzung des Schirms
$\hat{=}$ Ortsmessung x_0

offenbar: Änderung von $\psi(x) \longrightarrow \delta(x-x_0)$