6.2 Meßwerte der Einzelmessung

· zunächst

a) System im Eigenzustand von $\hat{A}$:

· $\psi(\underline{r},t) = \varphi_n(\underline{r})$ mit $\hat{A}\varphi_n = a_n\varphi_n$ (diskretes EW-Spektrum)

$$\longrightarrow \quad \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \underbrace{A|\psi\rangle}_{a_n\varphi_n} = a_n \underbrace{\langle \varphi_n|\varphi_n\rangle}_{=1} = a_n$$

$$(\Delta A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 = \langle \psi | \underbrace{\hat{A}^2|\psi\rangle}_{a_n^2\varphi_n} - a_n^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_n \text{ wird mit Sicherheit gemessen} \\ \longrightarrow \; a_n \text{ Meßwert} \end{array}} \quad (6.1)$$

b) allgemeiner Zustand

· Entwickle von VONS von Eigenzuständen der Observablen $\hat{A}$:

$$\text{disk. EW}: \quad \hat{A}\varphi_n = a_n\varphi_n$$
$$\text{kont. EW}: \quad \hat{A}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$$

$$\longrightarrow \psi(\underline{r},t) = \begin{cases} \sum_n c_n(t)\varphi_n(\underline{r}), & c_n(t) \overset{(5.12)}{=} \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle \\ \int d\lambda\, c_\lambda(t)\varphi_\lambda(\underline{r}), & c_\lambda(t) \overset{(5.16)}{=} \langle \varphi_\lambda | \psi(t) \rangle \end{cases} \quad (6.2)$$

NB: VONS nötig $\longrightarrow$ Observable = $\hat{A}$ mit VONS von EV

$$\boxed{\langle \hat{A} \rangle = \begin{cases} \sum_n |c_n(t)|^2 a_n \\ \int d\lambda\, |c_\lambda(t)|^2 \lambda \end{cases}} \quad (6.3)$$

Beweis: disk. EW!

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \sum_n c_n \varphi_n | \hat{A} | \sum_m c_m \varphi_m \rangle$$

$$= \sum_{n,m} c_n^*(t) c_m(t) \underbrace{\langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_m \rangle}_{= a_m \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = a_m \delta_{nm}} = \sum_n |c_n(t)|^2 a_n \qquad \text{qed}$$

→ Deutung:

> 1. $a_{n/\lambda}$ ... Meßwerte der einzelnen Messungen
> 2. $|c_{n/\lambda}(t)|^2$ ... Wahrscheinlichkeit mit der
>   (i) $\varphi_{n/\lambda}(\underline{r})$ in $\psi(\underline{r}, t)$ auftritt
>   (ii) $a_{n,\lambda}$ gemessen wird
> 3. Bei der Messung „kollabiert" die Wellenfkt. nach der Eigenfkt. φ_n zum gemessenen Eigenwert a_n.

(6.4)

• Bsp:

$$\langle A \rangle = \sum_n |c_n(t)|^2 E_n \quad , \quad c_n(t) = \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle \qquad 6.5)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \int d^3p \;\; p\, |\overline{\psi}(p,t)|^2 \quad , \quad \overline{\psi}(p,t) \overset{(5.17)}{\underset{(5.8)}{=}} \langle \varphi_p | \psi(t) \rangle \qquad (6.6)$$

$$\langle \hat{r} \rangle = \int d^3 r_0 \;\; \underline{r}_0 \, |\psi(\underline{r}_0, t)|^2 \quad , \quad \psi(\underline{r}_0, t) \overset{(5.10)}{=} \langle \varphi_{\underline{r}_0} | \psi(t) \rangle$$

$$= \int d^3 r \, \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)\, \psi(\underline{r}, t) \qquad (6.7)$$

$$\hat{\underline{r}}\, \varphi_{\underline{r}_0}(\underline{r}) = \underline{r}_0\, \varphi_{\underline{r}_0}(\underline{r}) = \underline{r}_0\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

NB: „$\psi(\underline{r}, t)$ ist ψ projiziert auf die EV von $\hat{\underline{r}}$!!!"

• Heisenbergsche Unschärferelation: $\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

(i) $\hat{x}$, $\hat{p}$ haben keine gemeinsamen EV

(ii) Bsp: $\psi \sim \delta(x - x_0) \sim \int dp \, 1 e^{\frac{i}{\hbar} p(x - x_0)}$ → „$\Delta p = \infty$"

→ alle p kommen mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor

8. Lösungen der 1dim. (stationären) SG

· Grundgleichung:

1D: $U(\underline{r}) = U(x) \longrightarrow \varphi(\underline{r}) = \varphi(x)$

$\longrightarrow$ SG:

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right]\varphi(x) = E\,\varphi(x) && (8.1)\\ &\varphi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left[U(x) - E\right]\varphi(x), \quad {}' = \frac{d}{dx} && (8.2)\end{aligned}}$$

· Aussagen zu $\varphi(x)$:

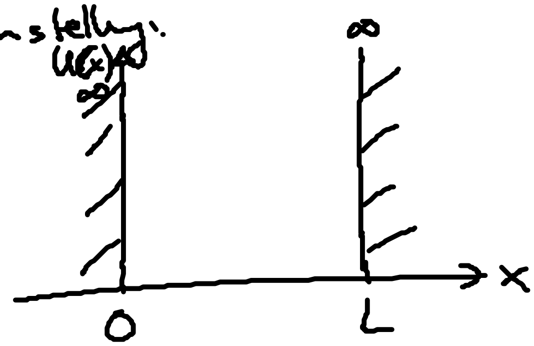
(i) $\left.\begin{array}{l}\int |\varphi(x)|^2\,dx = 1 \\ \text{fortlaufende Welle}\end{array}\right\}$ $\varphi(x)$ endlich (8.3)

(ii) endliches $U(x) \xrightarrow[(8.2)]{} \underset{\text{endlich}}{\varphi''(x)} \xrightarrow{\int\ldots dx} \varphi'(x) \xrightarrow{\int\ldots dx} \varphi(x)$ ... stetig, glatt

· zur Illustration:

8.1 Unendlich tiefer Potentialtopf

· Problemstellung:



Beschränkung des Teilchens auf endl. Volumen:
$\varphi(x) \neq 0$ für $x \in (0, L)$

· Idealisierung: „scharfe" Potentialkante $U_0 \gg E$ U_0

· Eigenwertproblem: (8.1|2)

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &\varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \\ &\varphi(0) = \varphi(L) = 0 \;\ldots\; \text{Randbed.}\end{aligned}} \quad (8.4)$$

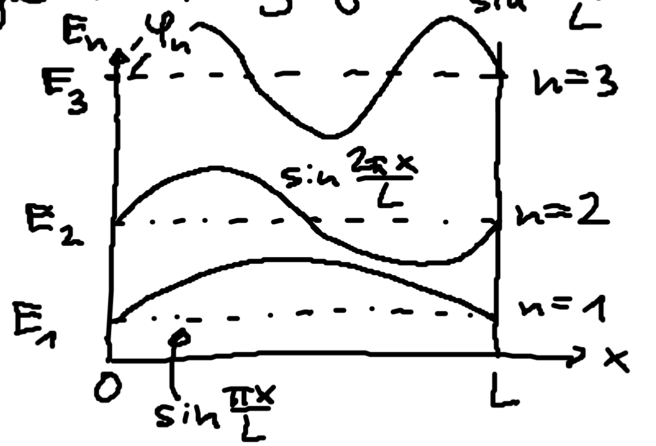
Lsg. $\boxed{\begin{array}{l} \text{Eigenfktn.: } \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_n x, \quad k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 1, 2, \dots \\ \text{Energie-EW: } E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar \pi}{L} \right)^2 n^2 \end{array}}$ (8.5)

Bem: (i) sin(..) löst (8.4), diskrete k_n wegen Randbed./endl. Vol.

$\longrightarrow$ <u>diskretes</u> Spektrum von E_n

(ii) $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{mn}$ ($n=m \rightarrow$ Normierungsfaktor $\sqrt{\frac{2}{L}}$)

· Energie-EW / Eigenfkt:



· <u>Bemerkungen:</u>

1. Lokalisiertes = gebundenes Teilchen $\longrightarrow$ diskrete Energie-EW

= " " -Meßwerte

≠ klass. Teilchen

2. $n = 1, 2, \dots$ Quantenzahl des Systems

3. $n = 1 \dots$ Grundzustand, wird erreicht durch Abstrahlung von Energie / Photonen

4. $E_1 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar \pi}{L} \right)^2 \neq 0$ ... Nullpkt.energie nötig damit Heisenbergsche Unschärfe-relation erfüllt ist.

denn: $\langle\hat{p}\rangle \overset{(4.39)}{=} \langle\varphi_1|\underbrace{\hat{p}}_{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}}|\varphi_1\rangle = 0$

$$\left.\begin{aligned} \Delta p &= \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle} = \sqrt{\langle 2m\hat{H}\rangle} = \sqrt{2mE_1} = \frac{\hbar\pi}{L} \\ \langle\hat{x}\rangle &= \frac{L}{2} \\ \Delta x &= \sqrt{\langle(\hat{x}-\frac{L}{2})^2\rangle} \overset{\text{0.4.}}{=} L\sqrt{\frac{1}{12}-\frac{1}{2\pi^2}} \approx 0.18L \end{aligned}\right\} \Delta x\,\Delta p \approx 0.18\pi\hbar > \frac{\hbar}{2}\,!$$

5. Energie-EW diskret, aber kontinuierlicher $\langle E\rangle$:

Bsp. $\psi(x,t) = c_1\varphi_1(x)\,e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\varphi_2(x)\,e^{-iE_2t/\hbar}$

$, \langle\psi|\psi\rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$

$$\longrightarrow \langle E\rangle = \langle\hat{H}\rangle = |c_1|^2E_1 + |c_2|^2E_2$$

$$= E_1 + |c_2|^2(E_2-E_1) \geq E_1$$

$$(\Delta E)^2 = \langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2 = (E_1-E_2)^2(|c_1|^2-|c_1|^4) \geq 0$$