6.2 Meßwerte der Einzelmessung

· zunächst

a) System im Eigenzustand von $\hat{A}$:

· $\psi(\underline{r},t) = \varphi_n(\underline{r})$ mit $\hat{A}\varphi_n = a_n\varphi_n$ (diskretes EW-Spektrum)

$$\longrightarrow \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \underbrace{A|\psi\rangle}_{a_n\varphi_n} = a_n \underbrace{\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle}_{=1} = a_n$$

$$(\Delta A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 = \langle \psi | \underbrace{\hat{A}^2 \psi\rangle}_{a_n^2\varphi_n} - a_n^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_n \text{ wird mit Sicherheit gemessen} \\ \longrightarrow a_n \text{ Meßwert} \end{array}} \quad (6.1)$$

b) allgemeiner Zustand

· Entwickle von VONS von Eigenzuständen der Observablen $\hat{A}$:

diskr. EW: $\hat{A}\varphi_n = a_n\varphi_n$

kont. EW: $\hat{A}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$

$$\longrightarrow \psi(\underline{r},t) = \begin{cases} \sum_n c_n(t)\varphi_n(\underline{r}) \,, & c_n(t) \overset{(5.12)}{=} \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle \\ \int d\lambda\, c_\lambda(t)\varphi_\lambda(\underline{r}) \,, & c_\lambda(t) \overset{(5.16)}{=} \langle \varphi_\lambda | \psi(t) \rangle \end{cases} \quad (6.2)$$

NB: VONS nötig $\longrightarrow$ Observable = $\hat{A}$ mit VONS von EV

$$\boxed{\langle \hat{A} \rangle = \begin{cases} \sum_n |c_n(t)|^2 a_n \\ \int d\lambda\, |c_\lambda(t)|^2 \lambda \end{cases}} \quad (6.3)$$

Beweis: disk. EW!

$$\langle \hat A\rangle = \langle \psi | A | \psi\rangle = \langle \sum_n c_n \varphi_n | \hat A | \sum_m c_m \varphi_m \rangle$$

$$= \sum_{n,m} c_n^*(t)\, c_m(t) \underbrace{\langle \varphi_n | \hat A | \varphi_m \rangle}_{= a_m \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = a_m \delta_{nm}} = \sum_n |c_n(t)|^2 a_n \qquad \text{qed}$$

→ **Deutung:**

1. $a_{n/\lambda}$ ... Meßwerte der einzelnen Messungen
2. $|c_{n/\lambda}(t)|^2$ ... Wahrscheinlichkeit mit der
   (i) $\varphi_{n/\lambda}(\underline{r})$ in $\psi(\underline{r},t)$ auftritt
   (ii) $a_{n,\lambda}$ gemessen wird (6.4)
3. Bei der Messung „kollabiert" die Wellenfkt. nach der Eigenfkt. φ_n zum gemessenen Eigenwert a_n.

• Bsp:

$$\langle A\rangle = \sum_n |c_n(t)|^2 E_n \,, \quad c_n(t) = \langle \varphi_n | \psi(t)\rangle \qquad 6.5)$$

$$\langle \hat p\rangle = \int d^3p \; p \, |\Psi(p,t)|^2 \,, \quad \Psi(p,t) \overset{(5.17)}{\underset{(5.8)}{=}} \langle \varphi_p | \psi(t)\rangle \qquad (6.6)$$

$$\langle \hat r\rangle = \int d^3 r_0 \; r_0 \, |\psi(r_0,t)|^2 \,, \quad \psi(r_0,t) \overset{(5.10)}{=} \langle \varphi_{r_0} | \psi(t)\rangle = \int d^3 r \, \delta(\underline{r}-\underline{r}_0)\, \psi(\underline{r},t) \qquad (6.7)$$

$$\hat r\, \varphi_{r_0}(\underline{r}) = r_0\, \varphi_{r_0}(\underline{r}) = r_0\, \delta(\underline{r}-\underline{r}_0)$$

NB: „$\psi(\underline{r},t)$ ist ψ projiziert auf die EV von $\hat r$!!!"

• Heisenbergsche Unschärferelation: $\Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

(i) $\hat x$, $\hat p$ haben keine gemeinsamen EV

(ii) Bsp: $\psi \sim \delta(x-x_0) \sim \int dp\, 1\, e^{\frac{i}{\hbar} p (x-x_0)} \longrightarrow$ „$\Delta p = \infty$"

→ alle p kommen mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor

8. Lösungen der 1dim. (stationären) SG

· Grundgleichung:

1D: $U(\underline{r}) = U(x) \longrightarrow \varphi(\underline{r}) = \varphi(x)$

$\longrightarrow$ SG:

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right]\varphi(x) = E\,\varphi(x) && (8.1)\\ &\varphi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left[U(x) - E\right]\varphi(x), \quad {}' = \frac{d}{dx} && (8.2)\end{aligned}}$$

· Aussagen zu $\varphi(x)$:

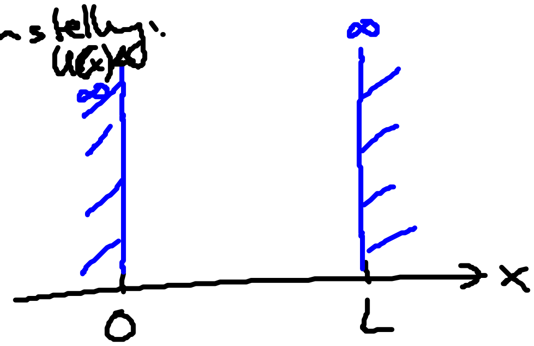
(i) $\left.\begin{array}{l}\int |\varphi(x)|^2\,dx = 1\\ \text{fortlaufende Welle}\end{array}\right\}$ $\varphi(x)$ endlich (8.3)

(ii) endliches $U(x) \xrightarrow[(8.2)]{} \underset{\text{endlich}}{\varphi''(x)} \xrightarrow{\int \ldots dx} \varphi'(x) \xrightarrow{\int \ldots dx} \varphi(x)$ … stetig, glatt

· zur Illustration:

8.1 Unendlich tiefer Potentialtopf

· Problemstellung:



Beschränkung des Teilchens auf endl. Volumen:
$\varphi(x) \neq 0$ für $x \in (0, L)$

· Idealisierung: „scharfe" Potentialkante $U_0 \gg E$

· Eigenwertproblem: (8.1|2)

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &\varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} && (8.4)\\ &\varphi(0) = \varphi(L) = 0 \;\ldots\; \text{Randbed.}\end{aligned}}$$

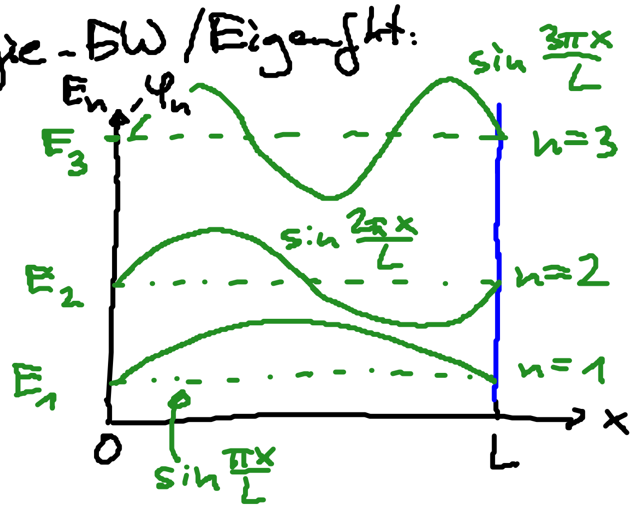
Lsg.: $$\boxed{\begin{array}{l}\text{Eigenfktn.: } \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin k_n x\,, \quad k_n = \frac{\pi}{L} n\,, \quad n = 1,2,\ldots \\ \text{Energie-EW: } E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^2 n^2\end{array}} \quad (8.5)$$

Bem.: (i) sin(..) löst (8.4), diskrete k_n wegen Randbed./endl. Vol.

$\longrightarrow$ <u>diskretes</u> Spektrum von E_n

(ii) $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{mn}$ ($n=m \rightarrow$ Normierungsfaktor $\sqrt{\frac{2}{L}}$)

- Energie-EW / Eigenfkt.:



- <u>Bemerkungen:</u>

1. Lokalisiertes = gebundenes Teilchen $\longrightarrow$ diskrete Energie-EW
= " " -Meßwerte
≠ klass. Teilchen

2. $n = 1, 2, \ldots$ Quantenzahl des Systems

3. $n=1 \ldots$ Grundzustand, wird erreicht durch Abstrahlung von Energie / Photonen

4. $E_1 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^2 \neq 0$ ... Nullpkt.energie
nötig damit Heisenbergsche Unschärfe-relation erfüllt ist.

denn: $\langle \hat{p} \rangle \overset{(4.39)}{=} \langle \varphi_1 | \underbrace{\hat{p}}_{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}} | \varphi_1 \rangle = 0$

$$\left.\begin{aligned} \Delta p &= \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle} = \sqrt{\langle 2m\hat{H} \rangle} = \sqrt{2mE_1} = \frac{\hbar\pi}{L} \\ \langle \hat{x} \rangle &= \frac{L}{2} \\ \Delta x &= \sqrt{\langle (\hat{x} - \tfrac{L}{2})^2 \rangle} \overset{\text{Ü.}}{=} L\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}} \approx 0.18L \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Delta x \Delta p \approx \\ &0.18\pi\hbar > \frac{\hbar}{2}\,! \end{aligned}$$

5. Energie-EW diskret, aber kontinuierlicher $\langle E \rangle$:

Bsp. $\psi(x,t) = c_1 \varphi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \varphi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}$

$$, \langle \psi | \psi \rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

$$\longrightarrow \langle E \rangle = \langle \hat{H} \rangle = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2$$

$$= E_1 + |c_2|^2 (E_2 - E_1) \geq E_1$$

$$(\Delta E)^2 = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 = (E_1 - E_2)^2 (|c_1|^2 - |c_1|^4) \geq 0$$