

8.2 Allgemeine Betrachtungen

b) Parität:

• $P f(x) = f(-x)$, $P U(x) = U(x)$

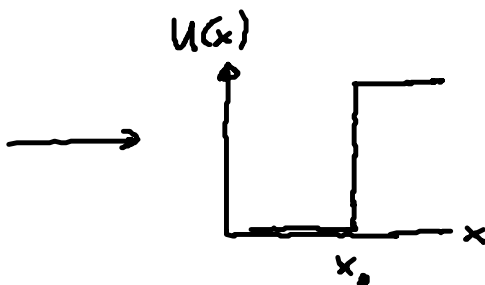
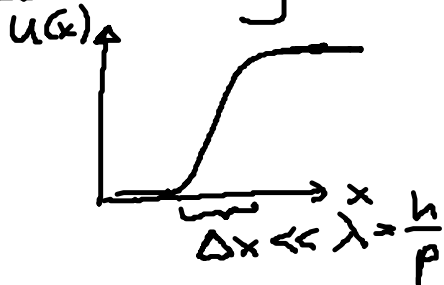
→ $\psi(x), \psi(-x)$ EV von \hat{H}

(ii) ungebundene Zustände:

zweifache Entartung $\hat{=} \psi(x), \psi(-x)$ → gerade Parität: $\psi(x) + \psi(-x)$
 ungerade " : $\psi(x) - \psi(-x)$

c) Anschlußbedingungen für unstetiges $U(x)$:

• Idealisierung:



• Vorteil: Bereiche mit konstantem U ,

SG: $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$ (8.9)

Lösung: (i) $E > U$: $E - U = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ $k > 0$

→ $\psi(x) = A e^{ikx} + A' e^{-ikx}$ (Stromzustände)
 $= A'' \sin kx + A''' \cos kx$ (gebundene Zustände)

(ii) $E < U$: klassisch nicht erlaubt

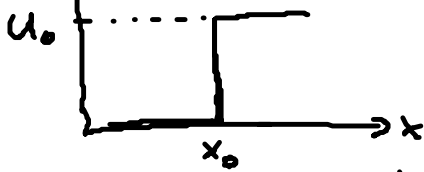
$E - U = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$, $\kappa > 0$

→ $\psi(x) = B e^{\kappa x} + B' e^{-\kappa x}$

Bestimme A, A', B, B', \dots aus Anschlussbedingungen!

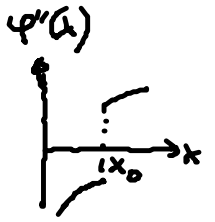
- Anschlussbedingungen:

1. $U(x)$

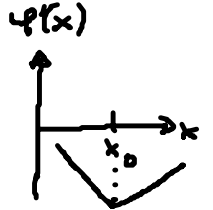


$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [U(x_0 + \varepsilon) - U(x_0 - \varepsilon)] = U_0 < \infty$$

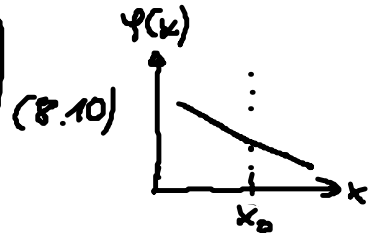
$$\varphi(x) \text{ endlich} \xrightarrow{(8.9)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varphi'(x_0 + \varepsilon) - \varphi'(x_0 - \varepsilon)] = \text{endlich}$$



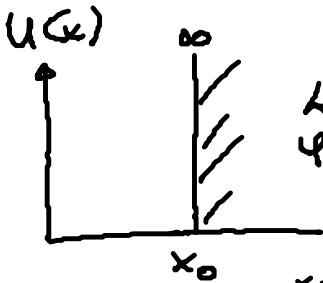
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} (8.9) dx \left\{ \begin{array}{l} \longrightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varphi'(x_0 + \varepsilon) - \varphi'(x_0 - \varepsilon)] = 0 \end{array} \right.$$



$\longrightarrow \varphi'(x)|_{x_0}$ stetig
 $\longrightarrow \varphi(x)|_{x_0}$ stetig & glatt



2.

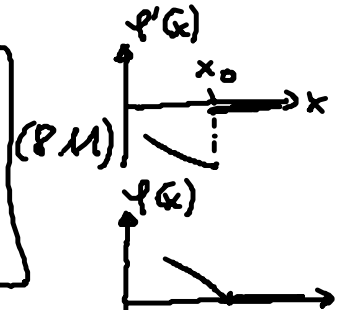


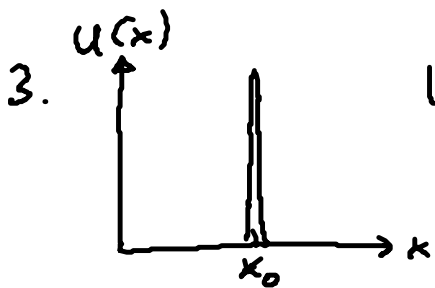
kein Teilchen
 $\varphi(x) = 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [U(x_0 + \varepsilon) - \underbrace{U(x_0 - \varepsilon)}_{=0}] = \infty$$

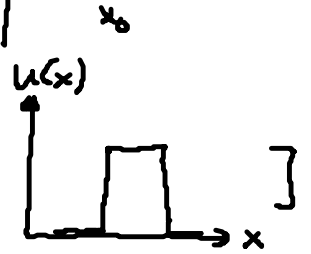
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} (8.9) dx \longrightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varphi'(x_0 + \varepsilon) - \varphi'(x_0 - \varepsilon)] = \text{endlich}$$

$\longrightarrow \varphi'(x)|_{x_0}$ unstetig
 $\longrightarrow \varphi(x)|_{x_0} = 0$ & stetig





$$U(x) = U_0 \delta(x - x_0) \quad [\text{Grenzfall von}]$$



$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} (8.9) dx \longrightarrow$$

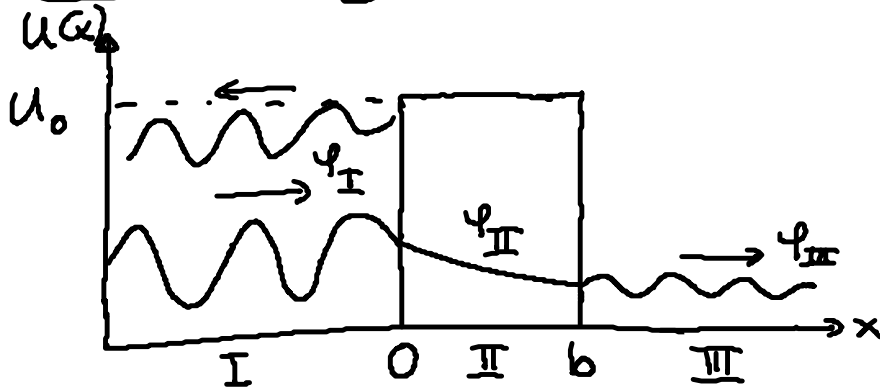
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\psi'(x_0 + \epsilon) - \psi'(x_0 - \epsilon)] = \frac{2m}{\hbar^2} U_0 \psi(x) \Big|_{x_0} \quad (8.12)$$

$$\longrightarrow \psi'(x) \Big|_{x_0} \text{ unstetig}$$

$$\longrightarrow \psi(x) \Big|_{x_0} \text{ stetig}$$

8.3 Potentialschwelle - Tunneleffekt

a) Problemstellung



- Löse: $\hat{A}\psi = E\psi$

→ Ergebnis: Kontinuum von Zuständen (unendliches System)

$$E < U_0: \psi_I, \underbrace{\psi_{II} \neq 0, \psi_{III} \neq 0}$$

Tunneleffekt = QT-Resultat

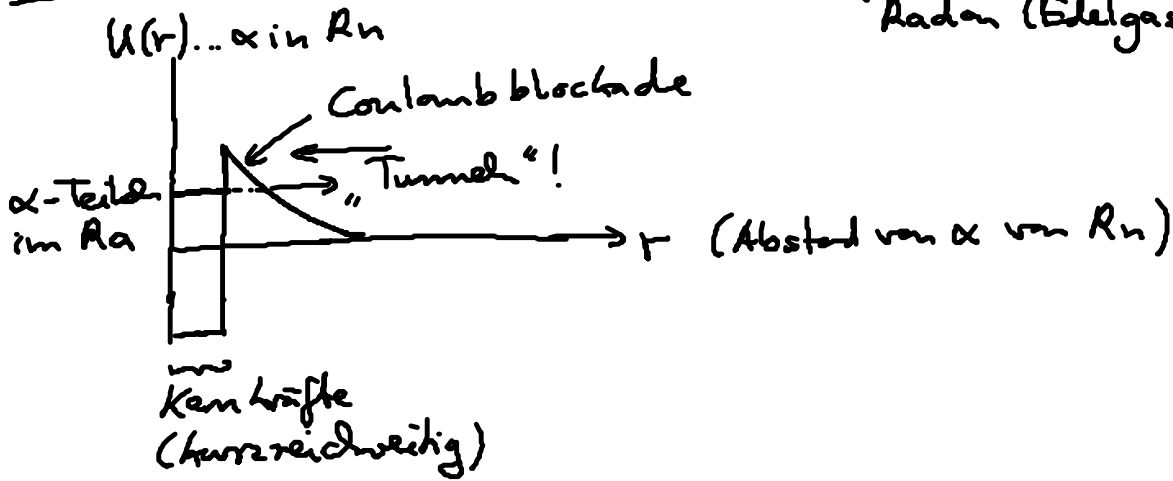
Klassik. Teilchen kon Pot. barriere nicht „überwinden“, wegen $E < U_0$

$E > U_0$: Transmission & Reflexion (\neq Klassik)

Resonanzen

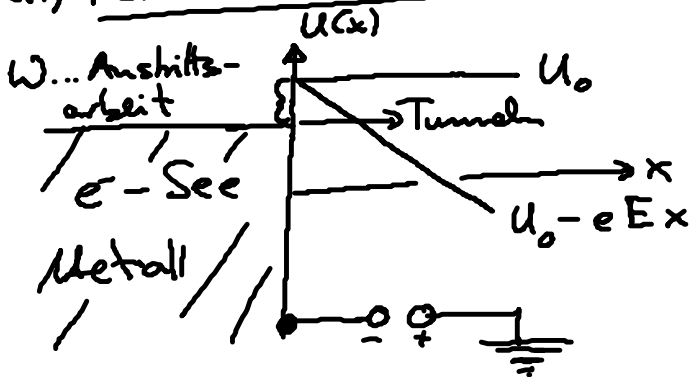
Realität: "Bausteine" Wellenpakete aus Eigenzuständen

b) Tunneleffekt:
 (i) α -Zerfall: Bsp: $Ra \xrightarrow{\text{Kernladungszahl}} Rn + \alpha$, $\alpha = \text{He}^4$... Heliumkern
 Radium (Erdalkalimetall) \rightarrow Radon (Edelgas)

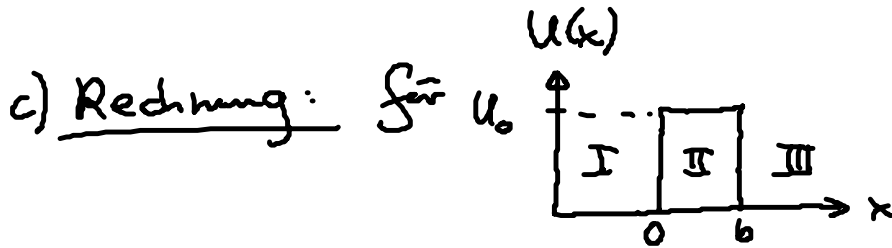
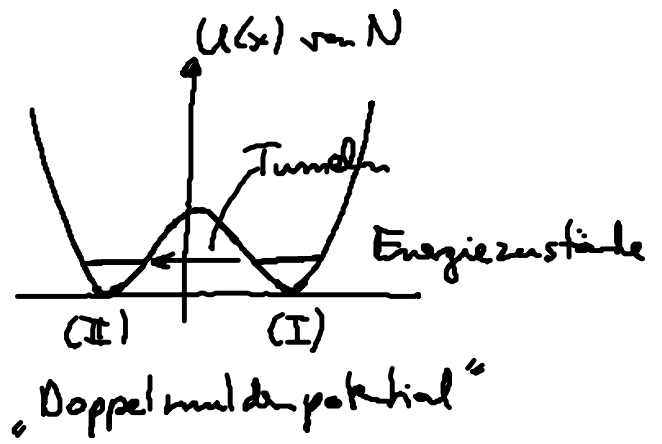
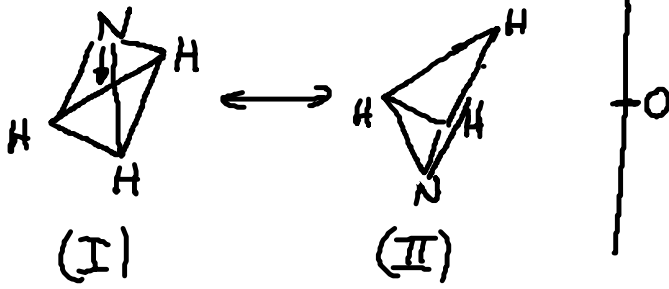


Umkehrung: Vereinigung gleich geladener Kerne (Bsp. Kernfusion)

(ii) Feldemission von e^- in Metallen:



(ii) Molekülschwingung: NH_3



• EW-Gln. (8.2/8.9): $\psi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(U-E)\psi(x) = 0$

(8.13) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Bereich I und III (} U=0 \text{): } \psi'' + k^2\psi = 0, \quad \boxed{k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}} \\ \text{Bereich II (} U_0 \neq 0 \text{): } \psi'' - \kappa^2\psi = 0, \quad \boxed{\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E) = \begin{cases} > 0, E < U_0 \\ < 0, E > U_0 \end{cases}} \end{array} \right.$

$\rightarrow \boxed{\psi = \frac{x}{k}} \quad (8.14)$

• Lösung:

(I) $(-\infty < x < 0)$: $\psi_{\text{I}}(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$

(II) $(0 < x < b)$: $\psi_{\text{II}}(x) = A_2 e^{-\kappa x} + B_2 e^{\kappa x}$ $\left[\begin{array}{l} \kappa > 0, E < U_0 \\ \kappa = iK, E > U_0 \end{array} \right]$

(III) $(b < x < \infty)$: $\psi_{\text{III}}(x) = A_3 e^{ikx} + \cancel{B_3 e^{-ikx}}$

Exp. einlaufende Welle von $-\infty$: A_1
 reflekt. Welle nach $-\infty$: B_1
 transm. Welle nach ∞ : A_3

Bestimmung der A_i, B_i :

Anschlussbed. (8.10):
$$\left. \begin{aligned} \varphi_I(0) &= \varphi_{II}(0), & \varphi'_I(0) &= \varphi'_{II}(0) \\ \varphi_{II}(b) &= \varphi_{III}(b), & \varphi'_{II}(b) &= \varphi'_{III}(b) \end{aligned} \right\} (8.16)$$

4 lineare Gl. für A_1, B_1, A_2, B_2, A_3

$$\left. \begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2 & (a) \\ ik A_1 - ik B_1 &= -\kappa A_2 + \kappa B_2 & (b) \\ A_3 e^{ikb} &= A_2 e^{-\kappa b} + B_2 e^{\kappa b} & (c) \\ ik A_3 e^{ikb} &= -\kappa A_2 e^{-\kappa b} + \kappa B_2 e^{\kappa b} & (d) \end{aligned} \right\} (8.17)$$

Exp: $|A_1|^2 \dots$ frei wählbar, Intensität!

für Rechnung: A_3

(8.17) (c, d) $\rightarrow A_2(A_3), B_2(A_3)$

\rightarrow (8.17) (a, b) $\rightarrow A_1(A_3), B_1(A_3)$

o.B. \rightarrow

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= e^{ikb} \left[\cosh(\kappa b) + \frac{i}{2} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \sinh(\kappa b) \right] A_3 \\ B_1 &= -\frac{i}{2} e^{ikb} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \sinh(\kappa b) A_3 \\ A_2 &= \frac{1}{2} e^{ikb} e^{\kappa b} \left(1 - \frac{i}{\eta} \right) A_3 \\ B_2 &= \frac{1}{2} e^{ikb} e^{-\kappa b} \left(1 + \frac{i}{\eta} \right) A_3 \end{aligned} \right\} (8.18)$$

d) Diskussion:

Transmissionskoeffizient:

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 \stackrel{(8.18)}{=} \frac{1}{\cosh^2 \kappa \left(1 + \frac{1}{4} \left| \gamma + \frac{1}{\gamma} \right|^2 |\sinh(\kappa b)|^2 \right)} \leq 1$$

\uparrow
 $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$

(8.19)

Reflexionskoeffizient:

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 \stackrel{(8.18)}{=} 1 - T \quad \dots \text{Erhaltung der Gesamt-} \\ \text{wahrscheinlichkeit}$$

• Tunnel effekt: $T \neq 0$ für $E < U_0$, $\kappa \stackrel{(8.13)}{=} \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$

für $\kappa b \gg 1$: sehr hohe und breite Schwelle

$$(8.19) \xrightarrow{\sinh \kappa x \approx \frac{1}{2} e^{\kappa x}} \boxed{T \approx \left(\frac{4\eta}{\eta^2 + 1} \right)^2 e^{-2\kappa b}}$$