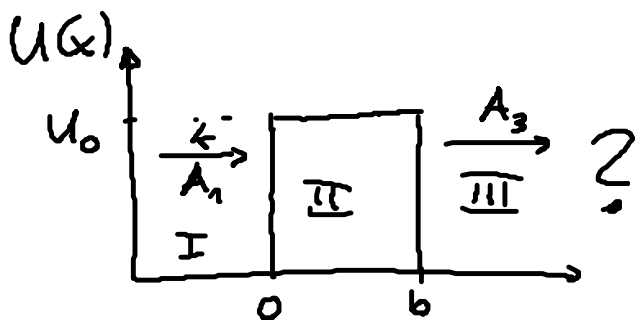


8.3 Potentialbarriere - Tunnel effekt



$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E) = \begin{cases} > 0, E < U_0 \dots \text{Tunnel} \\ < 0, E > U_0 \end{cases}$$

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2$$

$$\eta = \frac{\kappa}{k}$$

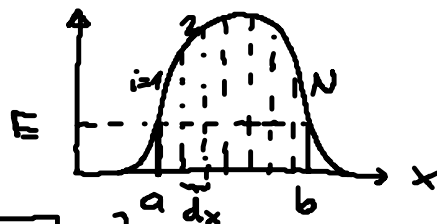
Tunnel effekt: $E < U_0$

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$$

$\kappa b \gg 1$: $T \approx \left(\frac{4\eta}{\eta^2 + 1} \right)^2 e^{-2\kappa b}$

(8.20)

Bem: Kont. Potentialbarriere $U(x)$



o.B.:

$$T = \prod_{i=1}^N \exp \left\{ - \frac{2}{\hbar} \underbrace{\sqrt{2m[U(x_i) - E]} dx}_{2\kappa} \right\}$$

$$= \exp \left\{ - \frac{2}{\hbar} \sum_{i=1}^N \sqrt{2m[U(x_i) - E]} dx \right\}$$

$N \rightarrow \infty$ \rightarrow $T = \exp \left\{ - \frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m[U(x) - E]} dx \right\}$ (8.21)

• Streuung: $E > U_0$, $\kappa = iK = \frac{i}{\hbar} \sqrt{2m(E-U_0)}$
 $= \frac{i}{\hbar} \sqrt{2mU_0} \sqrt{\frac{E}{U_0} - 1}$
 $\eta = \frac{\kappa}{k} = i \frac{K}{k} = i\Lambda = i\sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}$

$\frac{\sinh(ix) = i \sin x}{(8.19)}$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\Lambda - \frac{1}{\Lambda}\right)^2 \sin^2 Kb} \quad (8.22)$$

$T = T\left(\frac{E}{U_0}\right)$... Teilchen „spürt“ die Schwelle

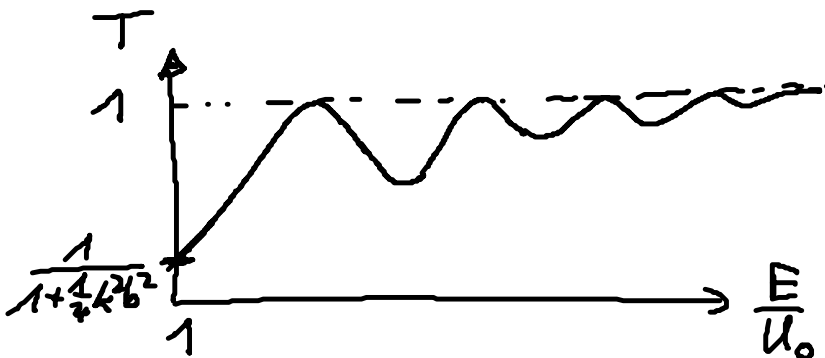
(i) „Resonanzen“: $T=1$ für $Kb = n\pi \rightarrow \left(\frac{E}{U_0}\right)_n, n=1,2,\dots$

(ii) Minimum von T : für $Kb \approx (2n+1)\frac{\pi}{2}, n=0,1,\dots$

(iii) $T\left(\frac{E}{U_0} \rightarrow 1\right)$: $\sin^2(Kb) \approx K^2 b^2$
 $K \rightarrow 0$

$$\rightarrow T \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{K}{k} - \frac{k}{K}\right)^2 K^2 b^2}$$

$$\rightarrow T(E=U_0) \stackrel{K=0}{=} \frac{1}{1 + \frac{1}{4} k^2 b^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{mU_0}{\hbar^2} b^2} \quad (8.23)$$



8.4 Harmonischer Oszillator

• Motivation: Klass. Mechanik

... 1D harm. Oszillator (ausführlich)

harm. gekoppelte Massepunkte

→ entkoppelte Oszillatoren (Eigenschw.)

z.B. Molekülschwingungen

Gitterschwingungen \rightarrow QT: Phononen

• hier: QT-Behandlung

a) Problemstellung

• EW-Problem: $\hat{H}\Psi = E\Psi$, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x)$ (8.24)

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2, \omega_0^2 = \frac{f}{m}$$

... Hamiltonoperator des harm. Oszillators

• Skalierung:

typische Länge: $\xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$	} dimensionslose Ort koord. $\xi = \frac{x}{\xi_0}$	
„ Energie: $\hbar\omega_0$		} Energie: $\varepsilon = E/\hbar\omega_0$

(8.25)

damit (8.24) \rightarrow $\frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right] \Psi(\xi) = \varepsilon \Psi(\xi)$ (8.26)

... EW-Problem ohne störende Parameter

NB: nur gebundene Zustände

\rightarrow diskretes Spektrum nicht entarteter EW

• Lsg. der bgl. (8.26): Sommerfeldsche Polynom methode

\rightarrow Hermite'sche Polynome

hier:

b) Algebraische Lsg.

• Führe ein:

„ Vernichtungsoperator “	$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{d\xi} + \xi \right)$
„ Erzeugungsoperator “	$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{d\xi} + \xi \right)$

(8.27)

adjungierter Operator: $\frac{d}{d\xi} \rightarrow -\frac{d}{d\xi}$

(8.26) $\rightarrow \boxed{(a^\dagger a + \frac{1}{2})\psi = \varepsilon\psi} \quad (8.28)$

Beweis: $a^\dagger a \psi(\xi) = \frac{1}{2} \left(-\frac{d}{d\xi} + \xi \right) \left(\frac{d}{d\xi} + \xi \right) \psi(\xi)$
 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} - \cancel{\xi \frac{d}{d\xi}} - 1 + \cancel{\xi \frac{d}{d\xi}} + \xi^2 \right) \psi(\xi)$
 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 - 1 \right) \psi(\xi) \quad (8.29)$

• Löse EW-Problem um: (8.30)

„Besetzungszahloperator“ $\hat{n} = a^\dagger a: \hat{n} \psi_\nu = \nu \psi_\nu \rightarrow \varepsilon = \nu + \frac{1}{2}$

• algebraische Struktur:

(i) $[a, a^\dagger] = 1$
 (ii) $[\hat{n}, a^\dagger] = a^\dagger$
 (iii) $[\hat{n}, a] = -a$ (8.31)

zu (ii) $[\hat{n}, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] = a^\dagger \cdot 1$

• Eigenfunktion. ψ_0, ψ_1, \dots Grundzustand

Beweis: $\nu \underbrace{\langle \psi_\nu | \psi_\nu \rangle}_{\geq 0} = \langle \psi_\nu | a^\dagger a \psi_\nu \rangle = \langle a \psi_\nu | a \psi_\nu \rangle \geq 0$

$\rightarrow \nu \geq 0 \rightarrow$ niedrigst möglicher EW: $\nu=0$ mit $a\psi_0=0$ und $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$

NB: weitere Argumentation klärt $\nu=0$ ist EW!! (8.32)

• Bdr: $\hat{n} \psi_\nu = \nu \psi_\nu \rightarrow \psi_{\nu+1} = \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} a^\dagger \psi_\nu$ mit $\hat{n} \psi_{\nu+1} = (\nu+1) \psi_{\nu+1}$
 $\dots a^\dagger$ erzeugt neue Eigenfktn.

Beweis: $\hat{n} a^+ \psi_\nu = (a^+ \hat{n} + a^+) \psi_\nu = (\nu+1) a^+ \psi_\nu$ gel
 (8.31)
 (ii)

Normierung: $\langle a^+ \psi_\nu | a^+ \psi_\nu \rangle = \langle \psi_\nu | a a^+ \psi_\nu \rangle =$
 $= \langle \psi_\nu | a^+ a + 1 | \psi_\nu \rangle = (\nu+1) \underbrace{\langle \psi_\nu | \psi_\nu \rangle}_{=1}$
 (8.20G)
 $= \nu+1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$ gel

• also: Lsg. von EW-Problem (8.30):

$$\hat{n} \psi_n = n \psi_n, \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \psi_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.34)$$

$n \dots$ „Besetzungszahl“ des harm. Oszillators

• Lösung vollständig?

(i) Beh: $a \psi_\nu$ ist Eigenfkt. zu EW $\nu-1$

$\dots a$ „vermindert“ Besetzung

Beweis: $\hat{n} a \psi_\nu \stackrel{(8.31)}{=} (a \hat{n} - a) \psi_\nu = (\nu-1) a \psi_\nu$ gel
 (iii)

(ii) Annahme: EW $\nu = n + \alpha$, $0 < \alpha < 1$ existiere: $\hat{n} \psi_\nu = (n + \alpha) \psi_\nu$
 $\rightarrow \hat{n} (a^{n+1} \psi_\nu) = [\nu - (n+1)] (a^{n+1} \psi_\nu) = (\alpha-1) (a^{n+1} \psi_\nu)$ (8.26)

Bilde: $(\alpha-1) \langle a^{n+1} \psi_\nu | a^{n+1} \psi_\nu \rangle = \langle a^{n+2} \psi_\nu | a^{n+2} \psi_\nu \rangle > 0$
 $\underbrace{(\alpha-1)}_{< 0} \underbrace{\langle a^{n+1} \psi_\nu | a^{n+1} \psi_\nu \rangle}_{> 0} = \underbrace{\langle a^{n+2} \psi_\nu | a^{n+2} \psi_\nu \rangle}_{> 0}$
 \uparrow
 $\hat{n} = a^+ a$

\rightarrow Widerspruch \rightarrow (8.26) falsch \rightarrow (8.34) vollständig

[NB: $\langle a^{n+2} \psi_\nu | a^{n+2} \psi_\nu \rangle = 0 \rightarrow \nexists \alpha$ nicht ganzzahlig]