

## e) Kohärente oder quasi-klassische Zustände

•  $a \psi_\alpha = \alpha \psi_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  (8.44)

• Zeitentwicklung:

$$\psi_\alpha(x, t) = e^{-i\omega_0 t/2} \psi_{\alpha(t)}(x) \quad \text{mit } \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega_0 t} \quad (8.50)$$

• Zeitentwicklung von  $\langle \hat{x} \rangle$ :

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi_{\alpha(t)} | \hat{x} | \psi_{\alpha(t)} \rangle \stackrel{(8.42)}{=} \frac{\int_0^{\infty} \langle \psi_{\alpha(t)} | a + a^\dagger | \psi_{\alpha(t)} \rangle$$

$$= \frac{\int_0^{\infty}}{\sqrt{2}} \left[ \langle \psi_{\alpha(t)} | a | \psi_{\alpha(t)} \rangle + \langle a \psi_{\alpha(t)} | \psi_{\alpha(t)} \rangle \right] = \frac{\int_0^{\infty}}{\sqrt{2}} (\alpha(t) + \alpha^*(t))$$

$$\longrightarrow \boxed{\langle \hat{x} \rangle = \sqrt{2} \int_0^{\infty} \text{Re } \alpha(t)} \quad (8.54)$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\infty} |\alpha| \cos(\omega_0 t - \beta)$$

$A \dots$  Amplitude

... Mittelwert verhält sich wie bei klass. Oszillator

→ Kohärente Zustände können klass. Situation nahe

$$[\text{Ehrenfest: } m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = - \langle \langle x \rangle \rangle !!!]$$

$$\text{klass. Grenzfall: } \langle \hat{H} \rangle \stackrel{(8.52)}{\approx} \hbar \omega_0 |\alpha|^2 \stackrel{(8.54)}{=} \frac{\hbar \omega_0}{2 \int_0^{\infty}} A^2$$

$|\alpha|^2 \gg 1$

$$\longrightarrow \langle \hat{H} \rangle = \frac{m \omega_0^2}{2} A^2$$

(8.25)  $\int_0^{\infty} = \frac{\hbar}{m \omega_0}$

... klass. Wert!

$$\text{mit } \frac{\Delta E}{\langle \hat{H} \rangle} \ll 1 !!$$

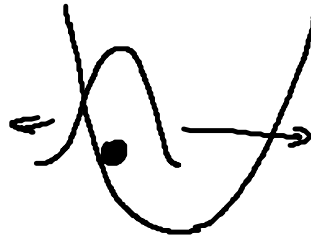
• Wahrscheinlichkeitsdichte: o.B. → Übungen

$$|\psi_{\alpha}(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \xi_0} \exp\left[-\frac{(x - \langle \hat{x} \rangle)^2}{\xi_0^2}\right] \quad (8.55)$$

... Gaußsches Wellenpaket

Breite  $\sim \xi_0$ ,

Schwerpunkt } oszilliert mit  
Maximum }  $\langle \hat{x} \rangle !!$



f) Anwendung:

(i) Schwingung von Molekülen

(ii) Schwingungen des Kristallgitters

≙ Normalschwingungen:  $\omega(\underline{k}, \rho)$   
 ↑ Kreisfrequenz    ↓ Wellenvektor    Polarisation

≙ entkoppelte Oszillatoren: Quantisierung:  $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$

$a^+(\omega, \underline{k}, \rho)$  ... erzeugt "Phononen" der Energie  $\hbar \omega$   
 = Teilchen der Gitterschwingungen

wichtig für Berechnung der spezif. Wärme

Kohärenter Zustand  $\longleftrightarrow$  klass. Normalschwingungen: keine feste Phononzahl

(iii) em. Welle:  $\omega(\underline{k}, \rho)$

Quantisierung der em. Welle (≙ QED)

$$\rightarrow \hat{H} = \sum_{\underline{k}, \rho} \hbar \omega(\underline{k}, \rho) \left[ a^+(\underline{k}, \rho) a(\underline{k}, \rho) + \frac{1}{2} \right]$$

- erzeugt "Photon" der Energie  $\hbar \omega(\underline{k}, \rho)$   
 ≙ Teilchen der em. Welle

- Energie-EU mit  $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$   
 $n$  ... Photonzahl im EU

wichtig: für: Hellraumstrahlung: Planck-Hypothese  
 Kohärente Zustände:  $\longleftrightarrow$  klass. em. Welle: keine feste Photonenzahl  
 $\longrightarrow$  Lasermode

## II. Der formale Rahmen der QT

### 3. Mathematische Grundlagen

• Motivation:

(i) Darstellung von Zustände:

$\psi(x, t)$  ... Ortsraum

$\bar{\psi}(p, t)$  ... Impulsraum

$c_n(t)$  ... Raum der Energie-EF  
 [s. Kap. 5.4]

darstellungsunabhängiger Zustand/Zustandsvektor:

$$\boxed{|\psi\rangle \dots \text{Diracscher Ket-Vektor}} \quad (3.1)$$

(ii) Zustände ohne Ortsraumdarstellung:

Bsp. Spin  $|s\rangle$  eines  $e^-$

### 3.1 Hilbert-Raum der Zustandsvektoren

a) Grundlagen:

• Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  = vollständiger Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt  
 = " unitärer Vektorraum (3.2)

Erläuterung:

(i) Vektorraum: Rechnen mit  $|\psi\rangle$

Vektorraumaxiome  $\rightarrow$  Kopie

(ii) hermitesches Skalarprodukt:  $|\psi\rangle$  ausmessen

[s. Kap. 4.1a)]

$\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$  ... Norm von  $|\psi\rangle$

$\langle\psi|\psi\rangle = 0$  ... Orthogonalität

(9.3)

Definition  $\rightarrow$  Kopie

(iii) Vollständigkeit:

Jede Cauchy-Folge  $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}$  konvergiert  
gegen ein  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

(9.4)

Idee:  $|\psi - \psi_n\rangle = |\psi\rangle - |\psi_n\rangle$

$\langle\psi - \psi_n|\psi - \psi_n\rangle \rightarrow 0$ , für  $n \rightarrow \infty$

- Satz:  
(o.B.)

Raum  $L^2$  der quadratintegrierbaren Funktionen ( $\langle\psi|\psi\rangle < \infty$ )  
ist Hilbertraum

(9.5)

(i)  $\langle\psi|\psi\rangle \stackrel{\text{Ortz}}{=} \int_{\text{Raum}} |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3r$

(ii) QT: zumindest stetiges  $|\psi\rangle$  [vgl. Kap. 8]

$\rightarrow$  unser  $\mathcal{H} \subset L^2$

- Satz:  
(o.B.)

In jedem  $\mathcal{H}$  existiert ein VONS mit höchstens  
abzählbar unauflösbaren Vektoren

(9.6)

Bsp: EU einer Observablen mit diskrettem EW-Spektrum

b) „erweiterter Hilbertraum“:

• eigentliche Zustandsvektoren:  $|\psi\rangle \in L^2$

uneigentliche „ :  $|\lambda\rangle \notin L^2, \lambda \dots \text{kont.}$  (9.10)  
 $\langle \lambda | \lambda' \rangle = \delta(\lambda - \lambda')$

Bsp: Impulseigenfkt.  $|\rho\rangle: \langle \rho | \rho' \rangle = \delta(\rho - \rho')$  (9.11)  
 Ortsdarstellung:  $\psi_\rho(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} \rho \cdot x}$

• erweiterter Hilbertraum = Menge der  $|\psi\rangle$  und  $|\lambda\rangle$  (9.12)

c) dualer Raum  $\mathcal{H}^*$ :

• lineares Funktional:  $|\psi\rangle \longrightarrow \langle \varphi | \psi \rangle \in \mathbb{C}$

$\mathcal{H}^* =$  Raum der linearen Funktionale  $\langle \varphi |$  (9.13)

• Bezeichnung:  $\langle \varphi | \psi \rangle$   
 Bra(k)ket [von angl. Klammer]

Dirac Bra-Vektoren:  $\langle \varphi | \in \mathcal{H}^*$  (9.14)  
 Ket - „ :  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

NB:  $\langle a\varphi_1 + b\varphi_2 | \psi \rangle = a^* \langle \varphi_1 | \psi \rangle + b^* \langle \varphi_2 | \psi \rangle$  (9.15)

Schließt aus Eigenschaft  
 des Skalarprodukts

3.2 Operatoren und Darstellungstheorie

• i.f.: oft  $A = \hat{A}$ ,  $\hat{\dots}$  weglassen, nur bei Zweifelsfällen

a) Observable und spezielle VONS.

• Wiederholung: [s. Kap. 4.1]

(i) Operator  $A$ :  $A|\psi\rangle = |A\psi\rangle = |\varphi\rangle$  mit  $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$  (9.16)

(ii) lineare Operatoren  $A$ :

$A(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a|A\psi_1\rangle + b|A\psi_2\rangle$  (9.17)

(iii) adjungierte Operatoren:

$$\langle \varphi | A | \psi \rangle = \langle A^+ \varphi | \psi \rangle \quad (3.18)$$

$$\text{klar } (A^+)^+ = A \quad (3.19)$$

(iv) hermitesche Operatoren:  $A^+ = A$  (3.20)

• EW-Problem von Observablen:  $A^+ = A$  [s. Kap. 5.2]

(i) diskretes EW-Spektrum.

$$A |\varphi_n\rangle = a_n |\varphi_n\rangle \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_n \in \mathbb{R} \\ \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm} \\ \{ |\varphi_n\rangle \dots \} \dots \text{VONS in } \mathcal{H} \end{cases} \quad (3.21)$$

EW  $\nearrow$   $\quad$   $\nwarrow$  EV

Bsp:  $H |\varphi_n\rangle = E |\varphi_n\rangle \rightarrow$  VONS der Energie  $E$  (3.22)

NB: (1) in  $\mathcal{H}^*$ .  $\langle A \varphi_n | = \langle a \varphi_n | = a_n^* \langle \varphi_n |$  (3.23)  
↑  
adjungierter Operator

(2) Entartungen von  $a_n$ :  $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} \dots = a_{n+m}$

Schmidtsches Orthogonalisierung für Entartungsraum

$$\rightarrow \langle \varphi_{n+i} | \varphi_{n+j} \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, m$$