9.2 Operatoren und Darstellungstheorie

a) Observable und spezielle VONS

- EW-Probleme von Observablen: $A^+ = A$

  (i) diskretes EW-Spektrum

  ⋮

  (ii) kont. EW-Spektrum:

$$\boxed{A\,|\varphi_\lambda\rangle = a_\lambda\,|\varphi_\lambda\rangle \quad \text{mit} \begin{cases} a_\lambda \in \mathbb{R} \\ \langle\varphi_\lambda|\varphi_{\lambda'}\rangle = \delta(\lambda-\lambda') \\ \{\ldots|\varphi_\lambda\rangle\ldots\} \ \ldots \text{VONS im } \mathcal{H} \end{cases}} \tag{9.24}$$

Bsp. (1) $\hat{\underline{p}}\,|\underline{p}\rangle = \underline{p}\,|\underline{p}\rangle$ .. Impuls-EV $|\underline{p}\rangle$ zu EW $\underline{p}$ (9.25)

(2) $\hat{\underline{r}}\,|\underline{r}\rangle = \underline{r}\,|\underline{r}\rangle$ ... Orts-EV $|\underline{r}\rangle$ zu EW $\underline{r}$ (9.26)

$= \begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$

b) Darstellung von Zustandsvektoren

= Entwicklung nach Basisvektoren eines VONS

$$\boxed{\text{Seien } \begin{matrix}\{\ldots|\varphi_n\rangle\ldots\} \\ \{\ldots|\varphi_\lambda\rangle\ldots\}\end{matrix} \text{ VONS in } \mathcal{H} \longrightarrow |\psi\rangle = \begin{cases} \sum_n c_n\,|\varphi_n\rangle \\ \int d\lambda\, c(\lambda)\,|\varphi_\lambda\rangle \end{cases} \text{mit} \begin{matrix} c_n = \langle\varphi_n|\psi\rangle \\ c(\lambda) = \langle\varphi_\lambda|\psi\rangle \end{matrix}}$$

[s. Kap. 5.3]

$$\boxed{\left.\begin{matrix} c_n \\ c(\lambda)\end{matrix}\right\} \text{ stellen } |\psi\rangle \text{ im speziellen VONS dar!}}$$

z.B. Orts-/Impuls-/Energieraum

- Vollständigkeitsrelation:

$$|\psi\rangle = \begin{cases} \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle \\ \int d\lambda\, |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\psi\rangle \end{cases} \overset{!}{=} \mathbb{1}\, |\psi\rangle$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\mathbb{1} = \begin{cases} \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| \\ \int d\lambda\, |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda| \end{cases}}$$

... Darstellung des Einheits/Einsoperators!

<u>Bem:</u> (i) $|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle \in \mathcal{H} \longrightarrow |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$ ... Operator

(ii) vgl: $\underline{\underline{1}} = \sum_{i=1}^{3} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$ $\hat{=}$ Tensoren/Matrizen

- Beispiele:

(i) Impuls-EV:

$$|\psi\rangle = \int d^3p\, |p\rangle\, \overline{\psi}(p) \quad \text{mit} \quad \overline{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$$

insbesondere: $\langle p|p'\rangle = \delta(p - p')$ ... „Orthonormierung" (9.30)

bzw weil: $|p'\rangle = \int d^3p\, |p\rangle\, \delta(p - p')$

(ii) Orts-EV:

$$|\psi\rangle = \int d^3r\, |r\rangle\, \psi(\underline{r}) \quad \text{mit} \quad \psi(\underline{r}) = \langle \underline{r}|\psi\rangle$$

insbesondere: (1) $\langle \underline{r}|\underline{r}'\rangle = \delta(\underline{r} - \underline{r}') = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$

... Orthonormierung (9.31)

bzw weil: $|\underline{r}'\rangle = \int d^3r\, |\underline{r}\rangle\, \delta(\underline{r} - \underline{r}')$

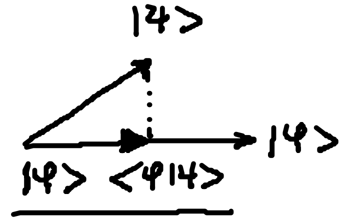
(2) $\langle \underline{r}|p\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot \underline{r}}$ (9.32)

... Impuls-EV in Ortsdarstellung

jetzt: spezielle lineare Operatoren in c)/d)

c) Projektoren:

- Betrachte Zustand: $|\psi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle$ mit $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$



Führe ein: Projektion von $|\psi\rangle$ auf $|\varphi\rangle$

$$\boxed{P_\varphi|\psi\rangle \text{ mit Projektor } P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|, \quad \langle\varphi|\varphi\rangle = 1} \qquad (9.33)$$

NB: $P_\varphi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ ... Tensorprodukt von $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H}^*$

- Eigenschaften:

(i) $\boxed{P_\varphi^2 = P_\varphi}$ (9.34)

$$|\varphi\rangle\underbrace{\langle\varphi|\varphi\rangle}_{1}\langle\varphi|$$

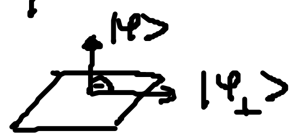
(ii) $\boxed{P_\varphi = P_\varphi^+}$ (9.35)

Beweis: $\langle\psi_1|P_\varphi|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi_2\rangle$

$$= \langle\psi_2|\varphi\rangle^*\langle\varphi|\psi_1\rangle^* \underset{\substack{a^*b^* \\ (ab)^*}}{=} \langle\psi_2|P_\varphi|\psi_1\rangle^*$$

$$= \langle P_\varphi\psi_1|\psi_2\rangle \quad \text{qed}$$

(iii) EW-Problem:



$$\boxed{\begin{aligned} &P_\varphi|\varphi\rangle = |\varphi\rangle \; ! \\ &P_\varphi|\varphi_\perp\rangle = 0 \end{aligned}}$$ ... EW 0 zu jedem $|\varphi_\perp\rangle$

NB: (i), (ii) ... charakt. Projektor!

- Verallgemeinerung:

(i) $P = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$

... Projektor auf Raum aufgespannt durch $\{|\varphi_1\rangle \dots |\varphi_n\rangle\}$

$P = 1$, falls $\{\dots|\varphi_i\rangle\dots\}$ = VONS

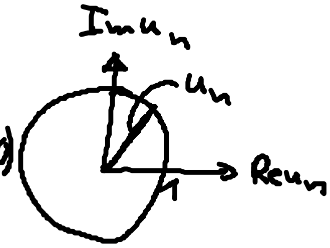
(ii) schiefe Projektoren: $P_{ij} = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|$ (9.38)

d) unitäre Operatoren

• **Def:** $\boxed{U^\dagger U = U U^\dagger = 1 \longleftrightarrow U^\dagger = U^{-1}}$ (9.39)

• EW-Problem: o.B.

$$U|\psi_n\rangle = u_n|\psi_n\rangle \quad \text{mit} \quad u_n u_n^* = |u_n|^2 = 1 \; ! \qquad \langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{mn} \qquad (9.40)$$



• Satz: $\boxed{A = A^\dagger \longrightarrow U = e^{iA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!} \; \ldots \text{unitär}}$ (9.41)

Bew: $U^\dagger = e^{-iA^\dagger} = e^{-iA} = U^{-1}$ gel

$\langle\psi|i|\varphi\rangle$
$= \langle -i\psi|\varphi\rangle$

EW-Problem: $\boxed{A|\varphi_n\rangle = a_n|\varphi_n\rangle \longrightarrow U|\varphi_n\rangle = e^{ia_n}|\varphi_n\rangle}$ (9.42)

verwende $A^m|\varphi_n\rangle = a_n^m|\varphi_n\rangle$

Bsp. Translationsoperator $T_{\underline{\xi}}$:

Ortsraum: $\langle \underline{r}|T_{\underline{\xi}}\psi\rangle \overset{!}{=} \psi(\underline{r}-\underline{\xi})$

$\xrightarrow{\text{Übung}}$ $\boxed{T_{\underline{\xi}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\xi}\cdot\hat{\underline{p}}}}$ (9.43)

• unitäre Transformation:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} |\bar{\psi}\rangle &= U\,|\psi\rangle \\ \bar{A} &= U A U^{+} \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{lassen invariant} \\ \text{(i) } \langle\varphi|\psi\rangle \\ \text{(ii) EW } a_n \text{ von } A \\ \text{(iii) Erwartungswerte } \langle\varphi|A|\psi\rangle \end{array}} \quad (9.44)$$

... Physik bleibt gleich

Bsp: Translation des ges. Systems

Bew. Übungen

insbesondere: $\langle\bar{\psi}|\bar{\psi}\rangle = \langle U\psi|U\psi\rangle = \langle U^{+}U\psi|\psi\rangle$

$= \langle\psi|\psi\rangle$ ... „Rotationen" von $|\psi\rangle$ in $\mathcal{H}$!

e) Darstellung von Operatoren:

· mit VONS $\{|\varphi_1\rangle \dots |\varphi_n\rangle\}$ und $\mathbb{1} = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$

(i) Entwicklung eines Operators A:

$$A = \mathbb{1} A \mathbb{1} = \sum_{n,m} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|A|\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|$$

$$\longrightarrow \boxed{A = \sum_{n,m} A_{nm}\, |\varphi_n\rangle\langle\varphi_m| \quad \text{mit} \quad A_{nm} = \langle\varphi_n|A|\varphi_m\rangle} \quad (9.45)$$

... Matrix! stellt A in VONS dar

(ii) Wirkung von Operator A: $A|\psi\rangle = |\chi\rangle$

Darstellung in VONS? $\langle\varphi_n|A\,\underset{\mathbb{1}}{\uparrow}\,|\psi\rangle = \langle\varphi_n|\chi\rangle$

$$\sum_m \underbrace{\langle\varphi_n|A|\varphi_m\rangle}_{A_{nm}}\underbrace{\langle\varphi_m|\psi\rangle}_{c_m} = \underbrace{\langle\varphi_n|\chi\rangle}_{b_n}$$

$$\xrightarrow{A|\psi\rangle = |\chi\rangle} \boxed{\sum_m A_{nm}\, c_m = b_n} \quad (9.46)$$

also: rechne mit Matrizen & Spaltenvektoren!

(iii) $$\boxed{(A\,B)_{nm} = \sum_i A_{ni} B_{im}} \quad (9.47)$$

$\mathbb{1} = \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ … Matrixmultiplikation

- Kontinuierliche Basis: VONS $\{..|\varphi_\lambda\rangle ...\}$ mit $\mathbb{1} = \int d\lambda\, |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|$

analog:

$$A = \iint d\lambda\, d\lambda'\; A(\lambda,\lambda')\, |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_{\lambda'}| \quad \text{mit } A(\lambda,\lambda') = \langle\varphi_\lambda|A|\varphi_{\lambda'}\rangle \quad (9.48)$$

$$A|\psi\rangle = |\chi\rangle \longrightarrow \int A(\lambda,\lambda')\, \underbrace{c(\lambda')}_{\langle\varphi_{\lambda'}|\psi\rangle}\, d\lambda' = \underbrace{b(\lambda)}_{\langle\varphi_\lambda|\chi\rangle} \quad (9.49)$$

$$(A\,B)(\lambda,\lambda') = \int d\lambda''\, A(\lambda,\lambda'')\, B(\lambda'',\lambda') \quad (9.50)$$

- Bsp: (i) Eins-Operator $\mathbb{1}$ (9.28)

(9.51) $$\mathbb{1}_{nm} = \langle\varphi_n|\mathbb{1}|\varphi_m\rangle = \delta_{nm} \quad \text{… Diagonalmatrix} \longrightarrow \mathbb{1} = \begin{cases} \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| \\ \int d\lambda\, |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda| \end{cases}$$

$$\mathbb{1}(\lambda,\lambda') = \langle\varphi_\lambda|\mathbb{1}|\varphi_{\lambda'}\rangle = \delta(\lambda-\lambda')$$

(ii) Hamiltonoperator H:

(1) VONS $\{..|\varphi_n\rangle ...\}$ $n = 1, 2, \ldots$

$$H_{nm} = \langle\varphi_n|H|\varphi_m\rangle, \quad \langle\varphi_n|\psi\rangle = c_n$$

$$\longrightarrow \langle\varphi_n|H\psi\rangle = \sum_m H_{nm} c_m$$

$\mathbb{1} = \sum_m |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|$

$$H|\psi\rangle = E_k|\psi\rangle$$

$$\longrightarrow \sum_m H_{nm} c_m = E_k c_n$$