

9.2 Operatoren und Darstellungstheorie

a) Observable und spezielle VONS

• EW-Probleme von Observablen: $A^\dagger = A$

(i) diskretes EW-Spektrum

⋮

(ii) kont. EW-Spektrum:

$$A|\varphi_\lambda\rangle = a_\lambda|\varphi_\lambda\rangle \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_\lambda \in \mathbb{R} \\ \langle \varphi_\lambda | \varphi_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda') \\ \{ \dots |\varphi_\lambda\rangle \dots \} \dots \text{VONS im } \mathcal{H} \end{cases} \quad (9.24)$$

Bsp: (1) $\hat{p}|\rho\rangle = p|\rho\rangle \dots$ Impuls-EV $|\rho\rangle$ zu EW p (9.25)

(2) $\hat{r}|\underline{r}\rangle = \underline{r}|\underline{r}\rangle \dots$ Orts-EV $|\underline{r}\rangle$ zu EW \underline{r} (9.26)

$$= \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

b) Darstellung von Zustandsvektoren

= Entwicklung nach Basisvektoren eines VONS

$$\text{Seien } \begin{cases} \{ \dots |\varphi_n\rangle \dots \} \\ \{ \dots |\varphi_\lambda\rangle \dots \} \end{cases} \text{ VONS in } \mathcal{H} \rightarrow |\psi\rangle = \begin{cases} \sum_n c_n |\varphi_n\rangle \\ \int d\lambda c(\lambda) |\varphi_\lambda\rangle \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} c_n = \langle \varphi_n | \psi \rangle \\ c(\lambda) = \langle \varphi_\lambda | \psi \rangle \end{cases}$$

[s. Kap. 5.3]

$\left. \begin{matrix} c_n \\ c(\lambda) \end{matrix} \right\}$ stellen $|\psi\rangle$ im speziellen VONS dar!

z.B. Orts-/Impuls-/Energieraum

• Vollständigkeitsrelation:

$$| \psi \rangle = \begin{cases} \sum_n | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \psi \rangle \\ \int d\lambda | \varphi_\lambda \rangle \langle \varphi_\lambda | \psi \rangle \end{cases} \stackrel{!}{=} \mathbb{1} | \psi \rangle$$

$$\longrightarrow \mathbb{1} = \begin{cases} \sum_n | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \\ \int d\lambda | \varphi_\lambda \rangle \langle \varphi_\lambda | \end{cases}$$

... Darstellung des Einheits/Einsoperators!

Bem: (i) $| \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \psi \rangle \in \mathcal{H} \rightarrow | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \dots$ Operator

(ii) vgl: $\mathbb{1} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ $\int =$ Tensoren/Matrizen

• Beispiele:

(i) Impuls-EV:

$$| \psi \rangle = \int d^3 p | p \rangle \bar{\psi}(p) \quad \text{mit } \bar{\psi}(p) = \langle p | \psi \rangle$$

$$\text{insbesondere: } \left. \begin{aligned} \langle p | p' \rangle &= \delta(p-p') \dots \text{„Orthonormierung“} \\ \text{bzw w\u00e4hl: } | p' \rangle &= \int d^3 p | p \rangle \delta(p-p') \end{aligned} \right\} (9.30)$$

(ii) Orts-EV:

$$| \psi \rangle = \int d^3 r | r \rangle \psi(r) \quad \text{mit } \psi(r) = \langle r | \psi \rangle$$

$$\text{insbesondere: } \left. \begin{aligned} (1) \langle r | r' \rangle &= \delta(r-r') = \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \\ &\dots \text{Orthonormierung} \\ \text{bzw w\u00e4hl: } | r' \rangle &= \int d^3 r | r \rangle \delta(r-r') \end{aligned} \right\} (9.31)$$

$$(2) \langle r | p \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot r} \quad (9.32)$$

... Impuls-EV in Ortsdarstellung

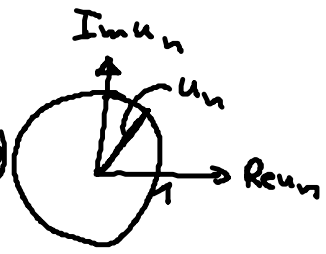
jetzt: spezielle lineare Operatoren in c) / d)

d) unitäre Operatoren

• Def: $U^\dagger U = U U^\dagger = 1 \iff U^\dagger = U^{-1}$ (3.35)

• EW-Problem: o.B.

$U|\varphi_n\rangle = u_n|\varphi_n\rangle$ mit $u_n u_n^* = |u_n|^2 = 1!$ (3.40)
 $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{mn}$



• Satz: $A = A^\dagger \implies U = e^{iA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!} \dots$ unitär (3.41)

Bew: $U^\dagger = e^{-iA^\dagger} = e^{-iA} = U^{-1}$ gel

$\langle \varphi | i\varphi \rangle$
 $= \langle -i\varphi | \varphi \rangle$

EW-Problem: $A|\varphi_n\rangle = a_n|\varphi_n\rangle \implies U|\varphi_n\rangle = e^{i a_n} |\varphi_n\rangle$ (3.42)
 verweide $A^m|\varphi_n\rangle = a_n^m |\varphi_n\rangle$

Bsp: Translationsoperator $T_{\frac{\hbar}{\lambda}}$

Ortsraum: $\langle r | T_{\frac{\hbar}{\lambda}} \varphi \rangle \stackrel{!}{=} \varphi(r - \frac{\hbar}{\lambda})$

$\xrightarrow{\text{Übung}} T_{\frac{\hbar}{\lambda}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar}{\lambda} \cdot \hat{p}}$ (3.43)

• unitäre Transformation:

$$\left. \begin{aligned} |\bar{\psi}\rangle &= U |\psi\rangle \\ \bar{A} &= U A U^\dagger \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{lassen invariant} \\ \text{(i) } \langle \psi | \psi \rangle \\ \text{(ii) EW } a_n \text{ von } A \\ \text{(iii) Erwartungswerte } \langle \psi | A | \psi \rangle \end{array} \quad (3.44)$$

... Physik bleibt gleich

Bsp: Translation des ges. Systems

Bew. Übungen

ins besondere: $\langle \bar{\psi} | \bar{\psi} \rangle = \langle U \psi | U \psi \rangle = \langle U^\dagger U \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle \dots$, Rotationen von $|\psi\rangle$ in \mathbb{R}^2 !

e) Darstellung von Operatoren:

• mit VONS $\{|\varphi_n\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\}$ und $\mathbb{1} = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|$

(i) Entwicklung eines Operators A:

$$A = \mathbb{1} A \mathbb{1} = \sum_{n,m} |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n | A | \varphi_m \rangle \langle \varphi_m |$$

$$\rightarrow A = \sum_{n,m} A_{nm} |\varphi_n\rangle \langle \varphi_m| \quad \text{mit } A_{nm} = \langle \varphi_n | A | \varphi_m \rangle \quad (3.45)$$

... Matrix! stellt A in VONS dar

(ii) Wirkung von Operator A: $A|\psi\rangle = |\chi\rangle$

Darstellung in VONS? $\langle \varphi_n | A | \psi \rangle = \langle \varphi_n | \chi \rangle$

$$\sum_m \underbrace{\langle \varphi_n | A | \varphi_m \rangle}_{A_{nm}} \underbrace{\langle \varphi_m | \psi \rangle}_{c_m} = \underbrace{\langle \varphi_n | \chi \rangle}_{b_n}$$

$$A|\psi\rangle = |\chi\rangle \rightarrow \sum_m A_{nm} c_m = b_n \quad (3.46)$$

also: rechne mit Matrizen & Spaltenvektoren!

$$(iii) \quad (AB)_{nm} = \sum_i A_{ni} B_{im} \quad (3.47)$$

$$\mathbb{1} = \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad \dots \text{Matrixmultiplikation}$$

• Antimimalde Basis: VONS $\{ \dots |\varphi_\lambda\rangle \dots \}$ mit $\mathbb{1} = \int d\lambda |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|$

analog:

$$A = \iint d\lambda d\lambda' A(\lambda, \lambda') |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_{\lambda'}| \quad \text{mit } A(\lambda, \lambda') = \langle\varphi_\lambda|A|\varphi_{\lambda'}\rangle \quad (3.48)$$

$$A|\varphi\rangle = |\chi\rangle \rightarrow \int A(\lambda, \lambda') \underbrace{\langle\varphi_\lambda|\varphi\rangle}_{\langle\varphi_\lambda|\varphi\rangle} d\lambda' = \underbrace{|\chi\rangle}_{\langle\varphi_\lambda|\chi\rangle} \quad (3.49)$$

$$(AB)(\lambda, \lambda') = \int d\lambda'' A(\lambda, \lambda'') B(\lambda'', \lambda') \quad (3.50)$$

• Bsp: (i) Eins-Operator $\mathbb{1}$

$$(3.51) \quad \mathbb{1}_{nm} = \langle\varphi_n|\mathbb{1}|\varphi_m\rangle = \delta_{nm} \quad \dots \text{Diagonal matrix} \rightarrow \mathbb{1} = \begin{cases} \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| \\ \int d\lambda |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda| \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\mathbb{1}(\lambda, \lambda') = \langle\varphi_\lambda|\mathbb{1}|\varphi_{\lambda'}\rangle = \delta(\lambda - \lambda')$$

(ii) Hamiltonoperator H :

(1) VONS $\{ \dots |\varphi_n\rangle \dots \}$ $n = 1, 2, \dots$

$$H_{nm} = \langle\varphi_n|H|\varphi_m\rangle, \quad \langle\varphi_n|\varphi\rangle = c_n$$

$$\rightarrow \langle\varphi_n|H|\varphi\rangle = \sum_m H_{nm} c_m$$

$$\mathbb{1} = \sum_m |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|$$

$$H|\varphi\rangle = E_k |\varphi\rangle$$

$$\rightarrow \sum_m H_{nm} c_m = E_k c_n$$