10.2 Vollständiger Satz kommutierender Observabler

- Messe Observable $A \longrightarrow |\psi\rangle = |a_n\rangle$ ... EV von A zu EW a_n

  Fall 1: a_n ... nicht entartet

  Fall 2: a_n ... g-fach entarteter EW mit EV $|a_n^{(i)}\rangle$, $i = 1 \dots g$

  weitere Info nötig

- Vorgehen: Suche Observable B mit $[A, B] = 0$

  (i) Satz: $\boxed{\text{Gilt } A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle \text{ dann } AB|a_n\rangle = a_n B|a_n\rangle}$

  Beweis: $AB|a_n\rangle = BA|a_n\rangle = a_n B|a_n\rangle$ qed

  (ii) Fall 1: a_n nicht entartet $\longrightarrow$ $B|a_n\rangle = b|a_n\rangle$

  $\longrightarrow |a_n\rangle$ auch EV zu B

  (iii) Fall 2: a_n entartet

  $$\longrightarrow B|a_n\rangle = \sum_{i=1}^{g} b_i \underbrace{|a_n^{(i)}\rangle}_{\substack{\text{spannen Entartungsraum } \mathcal{H}_n \\ \text{zu EW } a_n \text{ auf!}}}$$

(1) insbesondere gilt:

$$\langle a_m | B | a_n \rangle = 0 \quad \text{für } a_m \neq a_n$$

$$\text{Matrix } \underline{\underline{B}} = \begin{array}{c} \quad\;\; \mathcal{H}_n \;\; \mathcal{H}_m \\ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & /// & 0 & \\ & 0 & /// & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \} \mathcal{H}_n \\ \} \mathcal{H}_m \\ \end{array}$$

(2) Stelle „Teil von B" im Entartungsraum $\mathcal{H}_n = \{|a_n^{(1)}\rangle \dots |a_n^{(g)}\rangle\}$ dar

$$B_{ij} = \langle a_n^{(i)} | B | a_n^{(j)} \rangle$$

nun: diagonalisiere = suche EV zu B

also $\begin{pmatrix} /// \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$ ← EW von B

→ Satz: $\boxed{\text{Zu kommutierende } A, B \text{ existiert immer ein VONS, dessen Vektoren zugleich EV von } A, B \text{ sind}}$ (10.2)

(3) falls $g > 2$ (g... Dimension des Entartungsraumes)
suche weitere $C, D, \ldots$ die mit A, B kommutieren

→ Satz: $\boxed{\text{Ein vollständiger Satz kommutierender Observabler } A, B, C, .. \text{ besitzt ein VONS von EV } |abc\ldots\rangle, \text{ die eindeutig durch den Satz von Quantenzahlen} = \text{EW } (a, b, c, \ldots) \text{ charakterisiert sind}}$ (10.3)

→ $\boxed{\text{Präpariere } |abc\ldots\rangle \text{ durch Messung von } A, B, C, \ldots}$ (10.4)

· Bezeichnung:

(i) reiner Zustand: $|\psi\rangle$

(ii) Mischzustand: besteht aus $|\psi_1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit w_1

$\vdots$

$|\psi_n\rangle$: " w_n

≙ unvollständige Info!

10.3 Schrödingerbild

· Zeitentwicklung des Zustandes $|\psi(t)\rangle$:

SG: $$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle} \quad (10.5)$$

- formale Lsg.:

$$\boxed{\begin{aligned} &|\psi(t)\rangle = \underbrace{U(t,t_0)}_{\text{Zeitentwicklungsoperator, unitär}} |\psi(t_0)\rangle \\ &\text{mit } \quad i\hbar \frac{d}{dt} U(t,t_0) = H(t)\, U(t,t_0) \\ &\text{und } \quad U^+(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0) \end{aligned}} \qquad (10.6)$$

<u>Beweis:</u>

(i) $U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$ in SG (10.5)

$$\longrightarrow \left(i\hbar \frac{d}{dt} U\right) |\psi(t_0)\rangle = (H\,U)\, \underbrace{|\psi(t_0)\rangle}_{\text{beliebig}} \quad \text{qed}$$

(ii) Normierung!

$$1 = \langle \psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle U\psi(t_0)|U\psi(t_0)\rangle$$

$$= \langle \psi(t_0)|U^+ U \psi(t_0)\rangle$$

$$= \langle \psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle \longrightarrow U^+ U = 1 \quad \text{qed}$$

$$\boxed{U(t,t_0) \ldots \text{beschreibt „Rotation" im Raum der Ket-Vektoren}} \quad (10.7)$$

- infinitesimale Zeittranslationen: $U(t,t) = 1$!

(10.6) $\quad dU(t+dt,t) = -\frac{i}{\hbar} H(t)\, dt$

$$\longrightarrow \boxed{U(t+dt,t) = 1 - \frac{i}{\hbar} H(t)\, dt} \quad (10.8)$$

unitär! $\quad U(t+dt,t)\,U^+(t+dt,t) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} H(t)\,dt\right)\left(1 + \frac{i}{\hbar} H\,dt\right)$

$$= 1 + O(dt^2) \quad \text{qed}$$

- zeitunabh. H:
  Lsg. von (10.6):

$$\boxed{U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}} \quad (10.9)$$

- Darstellungen:

(i) Ortsdarstellung: $\langle \underline{r}|$ (10.5)

$$\longrightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\underline{r},t) = \langle \underline{r}|H\psi(t)\rangle \overset{(9.57)}{=} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 + V(\underline{r})\right]\psi(\underline{r},t)} \quad (10.10)$$

(ii) Impulsdarstellung: $\langle \underline{p}|$ (10.5)

$$\longrightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}(\underline{p},t) = \langle \underline{p}|H\psi(t)\rangle \overset{(9.57)}{=} \frac{\underline{p}^2}{2m}\bar{\psi}(\underline{p}) + \int d^3p'\, \bar{V}(\underline{p}-\underline{p}')\bar{\psi}(\underline{p}')} \quad (10.11)$$

(iii) diskretes VONS: $\{\ldots|\varphi_n\rangle\ldots\}$: $\langle\varphi_n|\psi\rangle = c_n$ & $\langle\varphi_n|$ (10.5)

$$\longrightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}c_n(t) = \langle\varphi_n|H\psi\rangle \overset{(9.52)}{=} \sum_m H_{nm}c_m(t)} \quad (10.12)$$

(iv) VONS der Energie-EV: $H|\varphi_n\rangle = E|\varphi_n\rangle$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} & i\hbar \frac{\partial}{\partial t}c_n(t) = E_n c_n(t) \\ \longleftrightarrow \quad & c_n(t) = c_n(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \end{aligned}} \quad (10.13)$$

10.4 Heisenbergbild

- QT: Meßgrößen: EW a_n von A

$$\langle A\rangle = \sum_n a_n |c_n(t)|^2$$

Zustand des Systems: $|\psi(t_0)\rangle$

- Dynamik: SG: $|\psi(t_0)\rangle \longrightarrow |\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$
- Heisenberg: Stecke Dynamik in A

Lege fest:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Zustand des Systems: } |\psi_H\rangle = |\psi(t_0)\rangle \\ &\text{Dynamik '' '' : } A_H(t) = U^+(t,t_0)\,A\,U(t,t_0) \end{aligned}} \quad (10.14)$$

... Heisenbergbild (Index H)

konsistent?:

(i) $\boxed{\text{EW-Spektrum von } A_H(t) \text{ und } A \text{ sind identisch}}$ (10.15)

Bed.: $\underbrace{A_H(t)\, U^+|a_n\rangle}\, = a_n\, U^+|a_n\rangle$

Bew.: $U^+ A \underbrace{U U^+}_{=1} |a_n\rangle = U^+ a_n |a_n\rangle$

(ii) $\boxed{\langle A\rangle = \langle A_H\rangle}$ (10.16)

Bew.: $\langle A_H\rangle = \langle \psi_H | A_H | \psi_H\rangle = \langle \psi(t_0) | U^+ A U | \psi(t_0)\rangle$

$= \langle \psi(t) | A | \psi(t)\rangle$ qed

- Bew.gl. für $A_H(t)$

$$\frac{dA_H}{dt} \overset{(10.14)}{=} \left(\frac{d}{dt} U^+\right) A U + U^+ A \left(\frac{d}{dt} U\right) + U^+ \frac{\partial A}{\partial t} U$$

$$\xrightarrow[-i\hbar \frac{d}{dt} U^+ = U^+ H]{i\hbar \frac{d}{dt} U = HU} \quad i\hbar \frac{dA_H}{dt} = -U^+ H \underset{1 = UU^+}{} A U + U^+ A \underset{1 = UU^+}{} H U + i\hbar(\ldots)$$

Def.: $H_H = U^+ H U\,, \quad \frac{\partial A_H}{\partial t} = U^+ \frac{\partial A}{\partial t} U$

$$\longrightarrow \boxed{i\hbar \frac{dA_H}{dt} = [A_H, H_H] + i\hbar \frac{\partial A_H}{\partial t}} \quad (10.18)$$

- Korrespondenzprinzip: $A_H \longrightarrow A_K(x,p,t)$ ... klass. Observable

$\frac{1}{i\hbar}[\ldots,\ldots] \longrightarrow \{\ldots\}$ ... Poissonklammer

$$(10.18) \longrightarrow \boxed{\frac{dA_K}{dt} = \{A_K, H\} + \frac{\partial A_K}{\partial t}} \quad (10.19)$$

... Bew.gl. für $A_K(x,p,t)$ [vgl. Mechanik]

• Darstellung von (10.18) in diskreten VONS: $A_H \longrightarrow A^H_{nm}(t)$

$$H_H \longrightarrow \underbrace{H^H_{nm}(t)}_{\text{Matrizen!}}$$

(10.18) $\longrightarrow$
$$\boxed{i\hbar \frac{dA^H_{nm}}{dt} = [A_H, H_H]_{nm} + i\hbar \frac{\partial A^H_{nm}}{\partial t}} \qquad (10.20)$$

... Heisenbergsche Matrizenmechanik!
[EW der A^H_{nm} sind Meßgröße!]

• Konstanten der Bewegung:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} [A_H, H_H] = 0 \\ \dfrac{\partial A_H}{\partial t} = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow A_H = \text{konstant}} \qquad (10.21)$$

Bsp. Energieerhaltung: $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow U(t, t_0) \overset{(10.9)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar} H (t - t_0)}$

$$\longrightarrow H_H = H\ !$$

$$U^+ H U = H$$

• Wechselwirkungsbild (Dirac):

oft: $H = H_0 + \underbrace{\Delta H(t)}_{\text{„Störhamiltonian“}}$

Behandle im S-Bild

H-Bild [Zugang zu einer zeitabh. Störungstheorie]