

10.2 Vollständiger Satz kommutierende Observablen

• Messe Observable $A \rightarrow | \psi \rangle = | a_n \rangle \dots$ EU von A zu EW a_n

Fall 1: $a_n \dots$ nicht entartet

Fall 2: $a_n \dots$ g -fach entartete EW mit EU $| a_n^{(i)} \rangle, i=1 \dots g$
weitere Info nötig

• Vorgehen: Suche Observable B mit $[A, B] = 0$

(i) Satz: Gilt $A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$ dann $A B|a_n\rangle = a_n B|a_n\rangle$

Beweis: $A B|a_n\rangle = B A|a_n\rangle = a_n B|a_n\rangle$ qed

(ii) Fall 1: a_n nicht entartet $\rightarrow B|a_n\rangle = b|a_n\rangle$
 $\rightarrow |a_n\rangle$ auch EU zu B

(iii) Fall 2: a_n entartet
 $\rightarrow B|a_n\rangle = \sum_{i=1}^g b_i |a_n^{(i)}\rangle$
spanne Entartungsraum \mathcal{R}_n
zu EW a_n auf!

(1) insbesondere gilt:

$$\langle a_m | B | a_n \rangle = 0 \quad \text{für } a_m \neq a_n$$

$\mathcal{R}_n \quad \mathcal{R}_m$

$$\text{Matrix } \underline{B} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \text{//} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \text{//} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \mathcal{R}_n \\ \mathcal{R}_m \\ \vdots \end{matrix}$$

(2) Stelle „Teil von B “ im Entartungsraum $\mathcal{R}_n = \{ | a_n^{(1)} \rangle \dots | a_n^{(g)} \rangle \}$ dar

$$B_{ij} = \langle a_n^{(i)} | B | a_n^{(j)} \rangle$$

nm: diagonalisierbar = ساده EU in B

also $(\begin{smallmatrix} // \\ // \\ // \end{smallmatrix}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ EW von B

→ Satz: Zu kommutierende A, B existiert immer ein VONS, dessen Vektoren zugleich EU von A, B sind (10.2)

(3) falls $g > 2$ (g ... Dimension des Entartungsraumes)
sade weitere C, D, \dots die mit A, B kommutieren

→ Satz: Ein vollständiger Satz kommutierende Observable A, B, C, \dots besitzt ein VONS von EU $|abc\dots\rangle$, die eindeutig durch der Satz von Quaternen = EW (a, b, c, \dots) charakterisiert sind (10.3)

→ Präpariere $|abc\dots\rangle$ durch Messung von A, B, C, \dots (10.4)

• Berechnung:

(i) reiner Zustand: $| \psi \rangle$

(ii) Mischzustand: besteht aus $| \psi_1 \rangle$ mit Wahrscheinlichkeit w_1
 \vdots
 $| \psi_n \rangle$ " " w_n

≡ an vollständige Info!

10.3 Schrödingerbild

• Zeitentwicklung des Zustandes $| \psi(t) \rangle$:

SG: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle = H | \psi(t) \rangle$ (10.5)

• formale Lsg:

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{U(t, t_0)}_{\text{Zeitentwicklungsoperator, unitär}} |\psi(t_0)\rangle \quad (10.6)$$

$$\text{mit } i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0)$$

$$\text{und } U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0)$$

Beweis:

(i) $U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$ in SG (10.5)

$$\rightarrow (i\hbar \frac{d}{dt} U) |\psi(t_0)\rangle = (H U) \underbrace{|\psi(t_0)\rangle}_{\text{beliebig}} \quad \text{ged}$$

(ii) Normierung!

$$1 = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle U \psi(t_0) | U \psi(t_0) \rangle$$

$$= \langle \psi(t_0) | U^\dagger U \psi(t_0) \rangle$$

$$= \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle \rightarrow U^\dagger U = 1 \quad \text{ged}$$

$U(t, t_0)$... beschreibt „Rotation“ im Raum der Ket-Vektoren (10.7)

• in infinitesimale Zeittranslationen: $U(t, t) = 1!$

$$(10.6) \quad dU(t+dt, t) = -\frac{i}{\hbar} H(t) dt$$

$$\rightarrow \boxed{U(t+dt, t) = 1 - \frac{i}{\hbar} H(t) dt} \quad (10.8)$$

$$\begin{aligned} \text{unitär! } U(t+dt, t) U^\dagger(t+dt, t) &= (1 - \frac{i}{\hbar} H(t) dt) (1 + \frac{i}{\hbar} H(t) dt) \\ &= 1 + O(dt^2) \quad \text{ged} \end{aligned}$$

• zeit unabh. H:
Lsg. von (10.6) ≠

$$\boxed{U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}} \quad (10.9)$$

• Darstellungen:

(i) Ortsdarstellung: $\langle r |$ (10.5)

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r,t) = \langle r | H \psi(t) \rangle \quad (10.10)$$

$$\stackrel{(9.57)}{=} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V(r) \right] \psi(r,t)$$

(ii) Impulsdarstellung: $\langle p |$ (10.5)

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}(p,t) = \langle p | H \psi(t) \rangle \quad (10.11)$$

$$\stackrel{(9.57)}{=} \frac{p^2}{2m} \bar{\psi}(p) + \int d^3p' \bar{V}(p-p') \bar{\psi}(p')$$

(iii) diskretes VONS: $\{ \dots | \varphi_n \rangle \dots \}$: $\langle \varphi_n | \psi \rangle = c_n$ & $\langle \varphi_n | \psi \rangle$ (10.5)

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_n(t) = \langle \varphi_n | H \psi \rangle \quad (10.12)$$

$$\stackrel{(9.52)}{=} \sum_m H_{nm} c_m(t)$$

(iv) VONS der Energie - EU: $H | \varphi_n \rangle = E | \varphi_n \rangle$

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_n(t) = E_n c_n(t) \quad (10.13)$$

$$\leftrightarrow c_n(t) = c_n(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

10.4 Heisenbergbild

• QT: Meßgrößen: EW a_n von A

$$\langle A \rangle = \sum_n a_n |c_n(t)|^2$$

Zustand des Systems: $|\psi(t_0)\rangle$

• Dynamik: SG: $|\psi(t_0)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$

• Heisenberg: Stelle Dynamik in A

lage fest:

$$\text{Zustand des Systems: } |\psi_H\rangle = |\psi(t_0)\rangle \quad (10.14)$$

$$\text{Dynamik " " : } A_H(t) = U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0)$$

... Heisenbergbild (Index H)

Konsistenz?

(i) $\boxed{\text{EW-Spektrum von } A_H(t) \text{ und } A \text{ sind identisch (10.15)}}$

Beh.: $A_H(t) U^+ |a_n\rangle = a_n U^+ |a_n\rangle$

Bew.: $U^+ A U U^+ |a_n\rangle = U^+ a_n |a_n\rangle$
 $= a_n U^+ |a_n\rangle$

(ii) $\boxed{\langle A \rangle = \langle A_H \rangle}$ (10.16)

Bew.: $\langle A_H \rangle = \langle \psi_H | A_H | \psi_H \rangle = \langle \psi(t) | U^+ A U | \psi(t) \rangle$
 $= \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$ qed

• Bew. gl. für $A_H(t)$

$$\frac{dA_H}{dt} \stackrel{(10.14)}{=} \left(\frac{d}{dt} U^+\right) A U + U^+ A \left(\frac{d}{dt} U\right) + U^+ \frac{\partial A}{\partial t} U$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} U &= H U \\ -i\hbar \frac{d}{dt} U^+ &= U^+ H \end{aligned}$$

$$i\hbar \frac{dA_H}{dt} = -U^+ H A U + U^+ A H U + i\hbar(\dots)$$

$\underbrace{\quad}_{1=UU^+} \quad \underbrace{\quad}_{1=UU^+}$

Def.: $H_H = U^+ H U, \quad \frac{\partial A_H}{\partial t} = U^+ \frac{\partial A}{\partial t} U$

$$\longrightarrow \boxed{i\hbar \frac{dA_H}{dt} = [A_H, H_H] + i\hbar \frac{\partial A_H}{\partial t}} \quad (10.18)$$

• Korrespondenzprinzip: $A_H \longrightarrow A_K(x, p, t)$... klass. Observable

$$\frac{1}{i\hbar} [\dots] \longrightarrow \{ \dots \} \dots \text{ Poissonklammer}$$

$$(10.18) \longrightarrow \boxed{\frac{dA_K}{dt} = \{A_K, H\} + \frac{\partial A_K}{\partial t}} \quad (10.19)$$

... Bew. gl. für $A_K(x, p, t)$ [Vorf. Mechanik]

• Darstellung von (10.18) in diskretm VWS: $A_H \rightarrow A_{nm}^H(t)$

$$H_H \rightarrow H_{nm}^H(t)$$

Matrix!

(10.18) \rightarrow

$$i\hbar \frac{dA_{nm}^H}{dt} = [A_H, H_H]_{nm} + i\hbar \frac{\partial A_{nm}^H}{\partial t} \quad (10.20)$$

... Heisenbergsche Matrixmechanik!

[EW der A_{nm}^H sind Messgrößen!]

• Konstanz der Bewegung:

$$\left. \begin{array}{l} [A_H, H_H] = 0 \\ \frac{\partial A_H}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow A_H = \text{konstant} \quad (10.21)$$

Bsp: Energieerhaltung: $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow U(t, t_0) \stackrel{(10.9)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$

$$\rightarrow H_H = H!$$

$$\uparrow \\ U^\dagger H U = H$$

• Wechselwirkungsbild (Dirac):

$$\text{oft: } H = H_0 + \underbrace{\Delta H(t)}_{\text{"Störhamiltonian"}}$$

Behandle im S-Bild

\uparrow
H-Bild [Zugang zu einer zeitabh. Störpotent.]