11.2 Algebraische Lösung des EW-Problems

$$\boxed{\begin{aligned} &J_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle \quad , \quad m \ldots \text{magnetische (Drehimpuls-) Quantenzahl} \\ &J^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle, \quad j \geq 0 \quad \ldots \text{Drehimpuls-Quantenzahl} \end{aligned}} \qquad (11.20)$$

· Ziel: Erlaubte Werte von j, m aus Drehimpulsalgebra (11.17/18)

· Def: $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Aufsteige-}\\ \text{Absteige-}\end{array}\right\} \text{operator: } J_\pm = J_x \pm i J_y \longrightarrow J_+^\dagger = J_-}$ (11.21)

· Kommutatoren:

$$[J_z, J_\pm] \overset{(11.17)}{=} i\hbar J_y \pm \hbar J_x = \pm\hbar J_\pm \qquad (11.22)$$

$$[J_+, J_-] \underset{(11.21)}{=} -2i \underbrace{[J_x, J_y]}_{i\hbar J_z} = 2\hbar J_z \qquad (11.23)$$

$$[J^2, J_\pm] \overset{(11.18)}{=} 0 \qquad (11.24)$$

· Relation: $\boxed{J_\mp J_\pm = J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z}$ (11.25)

Beweis: $(J_x \mp i J_y)(J_x \pm i J_y) = J_x^2 + J_y^2 \pm i [J_x, J_y]$

$$= J^2 - J_z^2 \pm i (i\hbar) J_z \quad \text{qed}$$

· Es gilt:

$$J_\pm |jm\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, |j\, m\pm 1\rangle \qquad (11.26)$$

also: $J^2 (J_\pm |jm\rangle) = \hbar^2 j(j+1) (J_\pm |jm\rangle)$ (11.27)

$$J_z (J_\pm |jm\rangle) = (m \pm 1)\hbar\, (J_\pm |jm\rangle) \qquad (11.28)$$

Beweise: (i) (11.27):

$$J^2 (J_\pm |jm\rangle) \overset{(11.24)}{=} J_\pm (J^2 |jm\rangle) = j(j+1)\hbar^2 (J_\pm |jm\rangle) \quad \text{qed}$$

(ii) (11.28):

$$J_z (J_\pm |jm\rangle) \overset{(11.22)}{=} (J_\pm \underbrace{J_z}_{\to m\hbar} \pm \hbar J_\pm) |jm\rangle = (m\pm 1)\hbar \, (J_\pm |jm\rangle) \quad \text{qed}$$

(iii) (11.26):

$$0 \leq \langle J_\pm jm | J_\pm jm \rangle = \langle jm | J_\mp J_\pm | jm \rangle$$

$$\overset{(11.25)}{=} \langle jm | J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z | jm \rangle = \quad \langle jm|jm\rangle = 1$$

$$= \hbar^2 [j(j+1) - m(m\pm 1)] \geq 0 \quad (11.29)$$

• Werte für j, m:

$$(11.29) \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} m>0: & j(j+1) \geq m(m+1) \\ m<0: & j(j+1) \geq m(m-1) = |m|(|m|+1) \end{array}\right\} \boxed{j \geq |m|}$$

damit: $m_{max} = j \longrightarrow J_+ |j m_{max}\rangle = 0$

$m_{min} = -j \longrightarrow J_- |j m_{min}\rangle = 0$

$\Longrightarrow$ festes j: $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ $\quad 2j+1$ EW von J^2 $= \text{Richtungsentartung}$

$$\longrightarrow \underbrace{j = 0, 1, 2, \ldots}_{\substack{\text{Bahndrehimpuls} \\ \text{[Kap. 11.4]}}} \; ; \; \underbrace{j = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \ldots}_{\substack{\text{z.B. Eigendrehimpuls} \\ = \text{Spin}}} \quad (11.31)$$

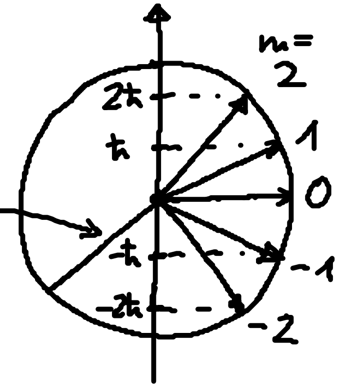
Bsp: e^- … $j = s = \frac{1}{2}$

[Kap. 13]

… Quantisierung bzgl. Betrags (j) und Richtung (m)

• Veranschaulichung von $|jm\rangle$

(i) Vektordiagramm: $j=2$



… Richtungsquantelung

(ii) $$\boxed{\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0} \quad (11.32)$$

Beweis: $\langle jm | J_x | jm \rangle \underset{(11.21)}{=} \langle jm | \frac{1}{2}(J_+ + J_-) | jm \rangle$

$$\sim \underbrace{\langle jm | jm+1 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle jm | jm-1 \rangle}_{=0} = 0 \quad \text{qed}$$

(iii) Unschärfe:

$$(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 \overset{(11.32)}{=} \langle J_x^2 + J_y^2 \rangle = \langle J^2 - J_z^2 \rangle$$

$$= \hbar^2 [j(j+1) - m^2] = \text{konst.} \geq 0 \quad (11.33)$$

Deutung: „J präzediert um z-Achse im Eigenzustand $|jm\rangle$"
besser: $J_x s_x + J_y s_y$ besitzt immer Unschärfe „ "

11.3 Der Hilbertraum $\mathcal{R}$

· Führe ein:

Raum $\mathcal{R}_j$ aufgespannt durch EV $\{\ldots |jm\rangle \ldots\}$, $m = -j \ldots +j$

$$\longrightarrow \dim \mathcal{R}_j = 2j+1$$

$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$, $J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$, J_z führen nicht aus $\mathcal{R}_j$ heraus.

$\longrightarrow$ Darstellung von $\vec{J}$ in $\mathcal{R}_j$:

Unwende: Matrizen:

$$\boxed{\begin{aligned} [J^2(j)]_{m'm} &= \langle jm' | J^2 | jm \rangle \overset{(11.20)}{=} \hbar^2 j(j+1)\,\delta_{mm'} \\ [J_z(j)]_{m'm} &= \langle jm' | J_z | jm \rangle \overset{(11.20)}{=} \hbar m\,\delta_{mm'} \\ [J_\pm(j)]_{m'm} &= \langle jm' | J_\pm | jm \rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\;\delta_{m'\,m\pm1} \end{aligned}} \quad (11.35)$$

(i) $j=0$: $\dim \mathcal{R}_0 = 1$ $\quad |00\rangle$, $J_i(0) = 0$ .. Raum der Skalare

(ii) $j=\frac{1}{2}$: $\dim \mathcal{R}_{\frac{1}{2}} = 2$ $\quad \left\{ |{+\tfrac{1}{2}}\,{+\tfrac{1}{2}}\rangle = |+\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \; |{+\tfrac{1}{2}}\,{-\tfrac{1}{2}}\rangle = |-\rangle = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ .. Raum der Spinoren [s. Kap. 13.4]

$$\xrightarrow[(11.35)]{(11.34)} \quad \boxed{\begin{aligned} &J_i(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\hbar}{2}\sigma_i \quad \text{mit} \\ &\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \end{aligned}} \quad (11.36)$$

... Paulische Spinmatrizen σ_i

Eigenschaften: (o.B.)

$$\boxed{\begin{aligned} &(i)\quad \sigma_i^2 = \mathbb{1}, \quad i = x,y,z \\ &(ii)\quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k \\ &(iii)\quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \end{aligned}}$$

(iii) $j=1$: $\dim \mathcal{R}_1 = 3$, Reihenfolge: $m = 1, 0, -1$

$$\xrightarrow[(11.35)]{(11.34)} \quad J_x(1) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}, \quad J_y(1) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}, \quad J_z = \hbar\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\underline{J}^2(1) = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Drehungen in R_1: unitäre Matrix $U(\underline{\varphi}, j=1) = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\varphi}\cdot\underline{J}(1)}$

$\longrightarrow$ „$\underline{J}(1)$ generiert Darstellung der Drehgruppe SO(3) in R_1"

- Hilbertraum: $$\boxed{R = R_0 \oplus R_{\frac{1}{2}} \oplus R_1 \oplus \ldots = \sum_j R_j} \quad (11.40)$$

11.4. Ortsdarstellung

- **Ges.:** $Y_{lm}(\underline{r}) = \langle \underline{r} | lm \rangle$ mit $j = l$! s.u.

- Operatoren in Kugelkoordinaten: $$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}\right\} (11.41)$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\nabla} &= \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \underline{r} &= r\,\underline{e}_r \end{aligned}\right\} (11.41)$$

$$\underline{L} = \frac{\hbar}{i}\,\underline{r}\times\underline{\nabla} \xrightarrow[(11.1)\,/\,(11.21)]{\text{z.B.}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_x &= \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\cos\varphi}{\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_y &= \frac{\hbar}{i}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\sin\varphi}{\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ L_\pm &= \hbar\, e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\frac{1}{\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L^2 &= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \end{aligned}} \quad (11.42)$$

$$\longrightarrow Y_{lm}(\underline{r}) = Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\,!$$

- Im Prinzip: Konstruktion von Y_{lm} über $L_\pm$ wie beim harm. Oszillator (→ s. Nolting, Cohen-Tannoudji, Haken-Wolf)

hier: löse EW-Problem direkt

• EW-Problem:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{\hbar^2}\underline{L}^2 Y_{lm} &= l(l+1)\,Y_{lm} \quad (11.43)\\ \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{lm} &= im\,Y_{lm} \quad (11.44)\end{aligned}}$$

• der Bahndrehimpuls: Separationsansatz: $Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \sim \phi_m(\varphi)\, P_l^m(\cos\vartheta)$

$(11.44) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi}\phi_m = im\phi_m$ $\quad \boxed{\phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad \underbrace{m \text{ ganzzahlig}}_{\text{wegen } \phi_m(\varphi+2\pi)=\phi_m(\varphi)}}$ (11.45)

(11.46)

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Bahndrehimpuls: } l = 0, 1, 2, \ldots;\ m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l}$

• Bestimmung von $P_l^m(\cos\vartheta)$

$Y_{lm} \sim e^{im\varphi} P_l^m(\cos\vartheta)$ in (11.43)

$$\longrightarrow \left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta} + l(l+1)\right] P_l^m(\cos\vartheta) = 0$$

mit $\frac{\partial}{\partial\vartheta} = \frac{\partial\cos\vartheta}{\partial\vartheta}\frac{\partial}{\partial\cos\vartheta} = -\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\cos\vartheta}$ und $x = \cos\vartheta$

$$\xrightarrow[x=\cos\vartheta]{} \left[(1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_l^m(x) = 0 \quad (11.47)$$

$$\text{Lsg: } \underbrace{P_l^{|m|}(x) = \frac{(1-x^2)^{|m|/2}}{2^l\, l!}\frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}}(x^2-1)^l = (1-x^2)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x)}_{\ldots \text{ assoziierten Legendre Polynome}} \quad (11.48)$$

wobei eingeführt:

$$\boxed{P_l(x) = P_l^0(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l} \quad (11.49)$$

.... Legendre Polynome: VONS auf $x \in [-1,1]$