

f) Energieeigenfktn. des Coulomb-Potentials

(12.32)

$$\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$\text{mit } R_{nl}(r) = -\frac{1}{a_B^{3/2}} \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2r}{na_B}\right)^l e^{-\frac{r}{na_B}} L_{n-l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_B}\right)$$

$$\int d^3x \Psi_{nlm}^* \Psi_{n'l'm'} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Bem.: (i) R_{nl} mit $n-l-1$ positiven Nullstellen (Knoten)

(ii) R_{nl} unabh. von m !

(iii) Deutung

(12.33)

$|\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi)|^2 r^2 dr d\Omega \dots$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Ort r, ϑ, φ in $r^2 dr d\Omega$

$\int |\Psi_{nlm}|^2 d\Omega$

$|R_{nl}(r)|^2 r^2 dr \dots$ Aufent. ... in Kugelschale mit Radius r und Dicke dr .

Bsp.: $R_{nl}(r), |R_{nl}(r)|^2 r^2$ s. Aufstellung

$l=0 \dots$ größte Aufenthaltsw. nahe am Kern bei $r=0$

Grund: $R_{n0}(r=0) \neq 0$, $R_{nl}(r=0) = 0$, für $l \geq 1$

13. Der Elektronenspin - Vervollständigung der QT

Motivation:

(i) bisher: Bahndrehimpuls mit $l=0, 1, 2, \dots$ [s. Kap. 11.2/4]

Was bedeutet $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ für quantenmechan. Teilchen?

(ii) exp. Befunde:

(1) Stern-Gerlach Versuch
= anomale Zeeman-Effekt

(2) Feinstruktur von Atomspektren

Evidenz für
halbzahligen
Drehimpuls
= Spin!

13.1. Elektronen im konstanten Magnetfeld

• vorläufig!

e^- im em Feld: s. Kap. 3.3b) mit $q = -e$
& $m = m_e$

Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + e \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}_{\text{Vektorpotential}} \right)^2 - \underbrace{e\varphi(\mathbf{r}, t)}_{\text{skalares Pot.}} \quad (13.1)$$

• konstantes Magnetfeld \underline{B} :

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A} \quad \text{mit } \underline{A} = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \underline{B} \quad (13.2)$$

in (13.1) \rightarrow

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - e\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{e}{4m} \underbrace{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} \times \underline{B})}_{= (\mathbf{r} \times \underline{B}) \cdot \mathbf{p}!} - \frac{e}{4m} \underbrace{(\mathbf{r} \times \underline{B}) \cdot \mathbf{p}}_{= -(\underline{B} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}} + \frac{e^2}{8m} (\mathbf{r} \times \underline{B})^2 \\ &= -\underline{B} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = -\underline{B} \cdot \underline{L} \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{1L} + H_2 \\ \text{mit } H_0 &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - e\varphi(\mathbf{r}, t) \quad \dots e^- \text{ im Potential} \\ H_{1L} &= +\frac{e}{2m} \underline{B} \cdot \underline{L} \\ H_2 &= \frac{e^2}{8m} (\mathbf{r} \times \underline{B})^2 \end{aligned} \quad \dots e^- \text{ im homogenen } \underline{B} \quad (13.3)$$

a) Zee man - Effekt

• fñhre ein.

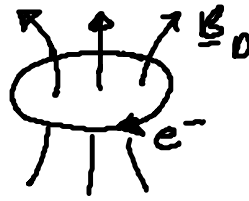
magnetisches Moment:

$$\underline{\mu}_L = -\frac{e}{2m} \underline{L} = -\gamma_L \underline{L} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \underline{L}$$

mit $\gamma_L = \frac{e}{2m} \dots$ gyro magnet. Verhältnis

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,579 \cdot 10^{-4} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \dots \text{Bohrsches Magneton}$$

Bem.: (i) Bedeutung: $\underline{L} \hat{=} \text{Ringstrom von } e^- \text{ um Kern}$
 $\rightarrow \underline{\mu}_L$ charakt. erzeugtes magnet. Dipolfeld \underline{B}_0



(ii) (13.4) $\rightarrow \underline{L} \parallel \underline{\mu}_L$

(iii) permanentes Moment \rightarrow Paramagnetismus

\rightarrow Einstellungsenergie in \underline{B} :

$$\boxed{H_{1L} = - \underline{\mu}_L \cdot \underline{B}} \quad (13.5)$$

Bem.: (i) klassisch: $\underline{\mu}_L \parallel \underline{B}$.. energetisch bevorzugt

(ii) QT: Energie-EW für H_{1L}

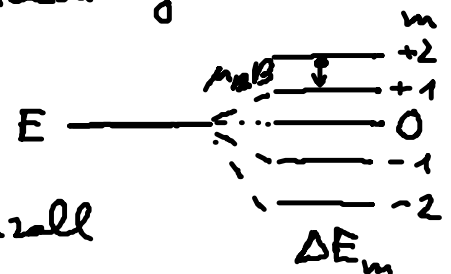
mit $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow[\underline{L} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \underline{L}]{\underline{\mu}_L =}$ $H_{1L} = + \frac{\mu_B}{\hbar} L_z B$ (13.6a)

$L_z |l, m\rangle = m \hbar |l, m\rangle \rightarrow H_{1L} |l, m\rangle = \Delta E_m |l, m\rangle$
Drehimpuls
EW

mit $\boxed{\Delta E_m = + \mu_B B m_l, m_l = -l, \dots, l}$ (13.6)

... \underline{B} hebt Richtdegenerierung der $2l+1$ Drehimpulszustände auf

= Zeeman-Effekt



$m_l \dots$ magnetische Quantenzahl

(iii) Abschätzung:

$$\frac{\Delta E_m}{E_1(\text{H-Atom})} \approx \frac{\mu_B B}{R_y} \approx 10^{-5} \frac{\text{V}}{\text{T}} \ll 1 \text{ für } B \leq 100 \text{T} \quad (13.7)$$

... ΔE_m nur kleine Störung zu Energie niveaus im Atom

b) Diamagnetismus

• zweiter Term mit \underline{B} in (13.3)

$$H_2 = \frac{e^2}{2m} (\underline{r} \times \underline{B})^2 = -\underline{\mu}_0 \cdot \underline{B} \quad (13.8)$$

mit $\underline{\mu}_0 = -\frac{e^2}{2m} \overbrace{r_{\perp}^2}^2 \underline{B}$... induziertes magnet. Moment

Komp. von $\underline{r} \perp$ zu \underline{B}

(i) $\underline{\mu}_0 \sim -\underline{B}$... Diamagnetismus $\propto B^2$

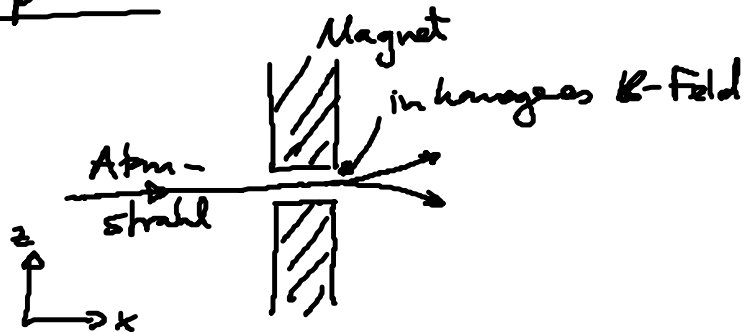
(ii) Abschätzung: $\frac{\langle H_2 \rangle}{\Delta E_m} \sim \frac{\frac{e^2}{2m} \langle r_{\perp}^2 \rangle B^2}{\mu_B B} \ll 1! \quad \text{für } B \leq 100 \text{ T}$

... vernachlässige H_2 gegen H_{1L}

13.2 Experimenteller Nachweis des Spins

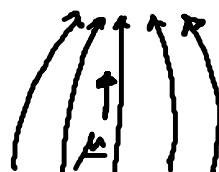
a) Stem-Gerad-Experiment

• Versuchsaufbau:



• Energie von $\underline{\mu}$ in $\underline{B}(\underline{r})$: $W = -\underline{\mu} \cdot \underline{B}(\underline{r}) \quad (13.9)$

Kraft auf $\underline{\mu}$: $\underline{F} = -\underline{\nabla} W$ $\frac{B_x, B_y \ll B_z}{\frac{\partial}{\partial x} B_z, \frac{\partial}{\partial y} B_z \ll \frac{\partial}{\partial z} B_z}$ $\underline{F} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \underline{e}_z \quad (12.10)$



→ Aufspaltung in $2l+1$ Strahlen!

• Stern-Gerlach (1922):

Silberatome: kugelsymmetrische e^- -Hülle + „Leudtelektron“ mit $l=0$

→ $\mu_z = 0$ → keine Aufspaltung erwartet

aber: 2 Strahlen = anomaler Zeeman-Effekt

→ Drehimpuls zu $j=s=\frac{1}{2}$ mit $m_s = \pm \frac{1}{2} \hbar$?

kein Bahndrehimpuls