

• magnetisches Moment: $\underline{\mu}_L = -\frac{e}{2m} \underline{L} = -\mu_B \underline{L} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \underline{L}$ (13.4)

• Einstellungsenergie: $H_{1L} = -\underline{\mu}_L \cdot \underline{B} = -\mu_{Lz} B$ (13.5)

• Stern-Gerlach:

$$\underline{F} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \underline{e}_z$$

Richthausen: $2l+1$ Strahlen

• Silberatome mit $l=0 \rightarrow \mu_z=0 \rightarrow$ ein Strahl,

aber im Experiment:

zwei Strahlen $\leftrightarrow j=s=\frac{1}{2}$
Drehimpuls

b) der Spin

\rightarrow Uhlenbeck und Goudsmit (1925): Postulat

e^- hat intrinsische Drehimpuls = Spin \underline{S} mit Spinguantenzahl $s=\frac{1}{2}$ und magnetischem Moment $\underline{\mu}_s = -g_s \underline{S} = -g_s \frac{e}{2m} \underline{S}$ mit Landé-Faktor $g_s \approx 2$ (13.11)

Wechselwirkungsenergie mit \underline{B} :

$$H_{1s} = -\underline{\mu}_s \cdot \underline{B} \quad (13.12)$$

Bem: (i) Spin \underline{S} ... zusätzliche Eigenschaft des e^-

Regierung durch Dirac-Gl. = relativ. Vollgenauigkeit des SG

(ii) $g_s \approx 2$... aus Experiment

$g_s = 2$... aus Dirac Gl.

$g_s = 2.0023$... aus QED

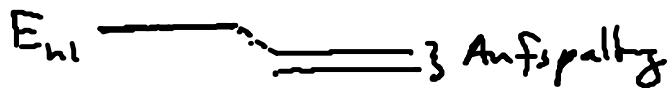
(iii) Proton, Neutron: auch Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

$$\text{Kern-Magneton: } \mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p} \approx 10^{-3} \mu_B \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_p = 5,58 \frac{\mu_K}{\hbar} \underline{=} \\ \mu_n = -3,82 \frac{\mu_K}{\hbar} \underline{=} \end{array} \right.$$

m_p - Masse Proton

13.3 Die Spin-Bahn-Kopplung

• weiterer Hinweis für Spin: Feinstruktur der Atomspektren



• Erklärung:

(i) e^- „kreist“ um pos. geladenen Atomkern mit \underline{E} -Feld

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\varphi(r), \quad V(r) = -e\varphi(r) \quad (13.13)$$

(ii) Ruhesystem des e^- : Atomkern = Ringstrom um e^- ,
erzeugt bei e^- :

$$\underline{B} \stackrel{\text{ob.}}{=} -\frac{1}{c^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Geschw. des } e^-}}{v} \times \underline{E} = \frac{1}{c^2} \underline{E} \times \frac{\underline{p}}{m} = -\frac{1}{mc^2} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \underline{r} \times \underline{p}$$

also. $\underline{B} = -\frac{1}{mc^2} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \underline{L}$ (13.14)

(iii) Wechselwirkung von \underline{S} mit \underline{B} :

$$\tilde{H}_{SB} \stackrel{(13.12)}{=} -\mu_s \cdot \underline{B} \stackrel{(13.14)}{=} \frac{e}{m} \underline{S} \cdot \underline{B} = -\frac{e}{m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \underline{L} \cdot \underline{S}$$

strenge Herleitung aus Dirac-Gl. \rightarrow Faktor $\frac{1}{2}$

$$\rightarrow H_{SB} = -\frac{e}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \underline{L} \cdot \underline{S} \quad (13.15)$$

• Gesamt-Hamilton-Operator für e^- im homogenen B -Feld:

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_1 + H_{SB} \\
 \text{mit } H_0 &= \frac{p^2}{2m} - e\varphi(x,t) \\
 H_1 &= H_{1L} + H_{1S} = \frac{e}{2m} \underline{B} \cdot (\underline{L} + 2\underline{S}) \\
 &= \frac{e}{2m} \underline{B} \cdot (\underline{J} + \underline{S}) \\
 \underline{J} &= \underline{L} + \underline{S} \dots \text{Gesamt Drehimpulsoperator} \\
 H_{SB} &= -\frac{e}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \underline{L} \cdot \underline{S}
 \end{aligned} \tag{13.16}$$

... „Pauli-Hamilton-Operator“

13.4. Pauli-Spinoren & Pauli-Gleichung

a) „Der Spin wirkt im Raum $\mathbb{R}_{1/2}$ “:

• Spinzustände:

$$\left. \begin{aligned}
 | \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rangle &= | + \rangle = | \uparrow \rangle \\
 | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle &= | - \rangle = | \downarrow \rangle
 \end{aligned} \right\} \text{UNNS in } \mathbb{R}_{1/2} \tag{13.17}$$

$\langle \pm | \pm \rangle = 1$
 $\langle + | - \rangle = 0$
 ... 2D-Raum!
 Spinquantenzahl $j = s = \frac{1}{2}$
 magnet. Quantenzahl $m_s = \pm \frac{1}{2}$

• EW-Gln: (vgl. Gl. (11.20))

$$\left. \begin{aligned}
 S^2 | \pm \rangle &= s(s+1) \hbar^2 | \pm \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 | \pm \rangle \\
 S_z | \pm \rangle &= m_s \hbar | \pm \rangle = \pm \frac{1}{2} \hbar | \pm \rangle
 \end{aligned} \right\} \tag{13.18}$$

• Auf-/Absteigeoperatoren: $S_{\pm} = S_x \pm i S_y$ (13.19)

Kommutatoren: s. Gl. (11.21) - (11.24)

• allg. Zustand in $\mathbb{R}_{1/2}$: $|\psi\rangle = \alpha_+ |+\rangle + \alpha_- |-\rangle$ (13.20)

• Darstellung in VONS: $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

(i) Zustände:
$$\underline{\eta} = \begin{pmatrix} \langle +|\eta\rangle \\ \langle -|\eta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} \quad (13.21)$$

... Pauli - Spinor

insbesondere:
$$\begin{aligned} |+\rangle &\rightarrow \underline{\eta}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |-\rangle &\rightarrow \underline{\eta}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.22)$$

(ii) Spinoperatoren: [s. Kap. 11.3] $S_i = \frac{\hbar}{2} G_i$ mit $G_i = \begin{pmatrix} \langle +|G_i|+\rangle & \dots \\ \vdots & \dots \end{pmatrix}$

$$\underbrace{G_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, G_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, G_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Paulische Spinmatrizen}}, G_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.23)$$

(iii) Wirkungsweise:

$$\begin{aligned} G_z \underline{\eta}_+ &= \underline{\eta}_+ \quad \dots \quad (13.24) \\ G_z \underline{\eta}_- &= -\underline{\eta}_- \end{aligned}$$

(iv) Relationen G_i :

(1) s. Gl (11.27)
 (2) $\text{Sp } G_i = 0 \quad (13.25)$
 (3) $\det G_i = -1 \quad (13.26)$
 (4) $(\underline{G} \cdot \underline{a})(\underline{G} \cdot \underline{b}) = \underline{a} \cdot \underline{b} \mathbb{1} + i \underline{G} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) \quad (13.27)$

$\underline{a}, \underline{b} \dots$ Vektoren

b) Produktraum $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R}_{1/2}$

= Raum der Spinorwellenfktn.: $|K\rangle = |\gamma\rangle |\eta\rangle \quad (13.28)$

(„direktes Produkt“ von $|\gamma\rangle$ & $|\eta\rangle$)

mit $|\chi\rangle \in \mathcal{H} \dots$ Raum der bisherigen Wellenfktn.
z.B. darstellbar im Ortsraum $\psi(\underline{r})$

$|\eta\rangle \in \mathcal{R}_{1/2}$ - Raum der Spinoren; zusätzliche Eigenschaft z.B. des e^-

• Skalarprodukt: $\langle \chi_1 | \chi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \langle \eta_1 | \eta_2 \rangle$ (13.29)

• dieses hebes VONS.

$$\left. \begin{array}{l} \{ \dots |\varphi_n\rangle \dots \} \dots \text{VONS in } \mathcal{H} \\ \{ |+\rangle, |-\rangle \} \dots \text{in } \mathcal{R}_{1/2} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \{ \dots |\varphi_n\rangle |+\rangle, |\varphi_n\rangle |-\rangle, \dots \} \\ = \{ \dots |\varphi_n^+\rangle, |\varphi_n^-\rangle \dots \} \\ \dots \text{VONS in } \mathcal{H} \otimes \mathcal{R}_{1/2} \end{array} \quad (13.30)$$

mit (1) Orthogonalität:

$$\langle \varphi_n \varepsilon | \varphi_m \varepsilon' \rangle = \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle \langle \varepsilon | \varepsilon' \rangle = \delta_{nm} \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \quad (13.31)$$

(2) Entwicklungssatz:

$$|\chi\rangle = \sum_n \sum_{\varepsilon=\pm} c_n(\varepsilon) |\varphi_n \varepsilon\rangle \text{ mit } c_n(\varepsilon) = \langle \varphi_n \varepsilon | \chi \rangle$$

• Darstellung als Spinor $\underline{\chi}$ im Ortsraum: Kontin. VONS $\{ \dots |r^+\rangle, |r^-\rangle, \dots \}$
Orts-EU

$$|\chi\rangle = \int d^3r [\psi_+(\underline{r}) |r^+\rangle + \psi_-(\underline{r}) |r^-\rangle] \quad (13.33)$$

mit $\psi_{\pm}(\underline{r}) = \langle r^{\pm} | \chi \rangle$

→ allg. Pauli-Spinor: $\underline{\chi} = \begin{pmatrix} \psi_+(\underline{r}) \\ \psi_-(\underline{r}) \end{pmatrix}$ (13.34)

c) Pauli-Gleichung

- darstellungsunabhängig:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\chi\rangle = H |\chi\rangle = (H_0 + H_1 + H_{SB}) |\chi\rangle \quad (13.35)$$

[im strengen Sinne: Pauli-Gl. ohne H_{SB}]

• mit Pauli - Spinor:

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_+(r) \\ \psi_-(r) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \psi_+(r) \\ \psi_-(r) \end{pmatrix}} \quad (13.36)$$

13.5 Rabi-Gleichung

- Motivation: (i) Spinmanipulation mit \underline{B} -Feld
(ii) Modell-System für 2-Niveau-System

- Situation: e^- -Spin in zeitabh. Magnetfeld $\underline{B}(t)$
& kein Bahndrehimpuls ($l=0$)

$$(13.16) \rightarrow \boxed{H = H_0 + H_1 \text{ mit } H_0 = \frac{p^2}{2m} - e\varphi(r) \quad (13.37)} \\ H_1(t) = \frac{e}{m} \underline{B}(t) \cdot \underline{S}$$

... Entkopplung von Bewegung im Orts- und Spinraum!

- Löse Pauli-Gl.: mit Produktsatz: $|X\rangle = |4\rangle |2\rangle$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |X\rangle = i\hbar \left[\left(\frac{d}{dt} |4\rangle \right) |2\rangle + |4\rangle \left(\frac{d}{dt} |2\rangle \right) \right] \\ = \left(H_0 |4\rangle \right) |2\rangle + |4\rangle H_1 |2\rangle$$

→ Entkopplung: $i\hbar \frac{d}{dt} |4\rangle = H_0 |4\rangle$

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |2\rangle = H_1(t) |2\rangle} \quad (13.38)$$

... Rabi-Gl.