

I. Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie

I.1. Binomialverteilung, Begriffe

betrachte Münzwurf: Kopf oben mit Wahrsch. p_1
Zahl " " " p_2

$$p_1 + p_2 = 1$$

mach N Würfe, wobei N_1 : Zahl der Würfe mit Ergebnis „Kopf oben“

$(N_2 = N - N_1)$ N_2 : Zahl der Würfe mit Zahl oben

es gilt:

$$p_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N}, \quad p_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_2}{N}$$

→ Wahrscheinlichkeit (W), 2mal hintereinander Kopf oben zu werfen:

$$p_1^2$$

• Wahrsch., hintereinander Kopf und Zahl zu werfen

$$p_1 \cdot p_2$$

Dabei haben wir angenommen, dass aufeinanderfolgende Würfe statistisch unabhängig sind!

Wahrsch. für eine bestimmte Sequenz von Ergebnissen bei N Würfeln:

$$p_1^{N_1} p_2^{N_2}$$

$$(N_1 + N_2 = N)$$

Beachte: Es gibt viele Möglichkeiten, N Würfe so durchzuführen, dass N_1 mit Kopf oben und N_2 mit Zahl oben landen!

Anzahl dieser Möglichkeiten: $\frac{N!}{N_1! N_2!}$

denn:

$N!$: Zahl der Möglichkeiten, N Ereignisse (Würfe) auf drei mögl. Ergebnisse zu verteilen

Drei $N_1! N_2!$, da die drei N_1 ~~Ergebnisse~~ Ergebnisse
 ununterscheidbar sind, ebenso die N_2 Ergebnisse

\Rightarrow Wahsch., N_1 mal "liegt oben" und N_2 mal
 "Zahl oben" unabhängig von der Reihenfolge

Zu werfen:

"Binomialverteilung"
$$W_N(N_1) = p_1^{N_1} p_2^{N_2} \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

mit $p_2 = 1 - p_1$

$N_2 = N - N_1$

Beispiel für diskrete Zufallsverteilung

Zusammenhang zum Binomialsatz:

$$(p_1 + p_2)^N = \sum_{N_1=0}^N \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1}$$

$$\frac{N!}{N_1! (N-N_1)!} W_N(N_1)$$

benutze:

$$p_1 + p_2 = 1$$

⇒
Binomialatz

$$\sum_{N_1=0}^N w_N(N_1) = 1$$

Normiertheit

Berechne nun den Mittelwert von N_1

allgemein: Mittelwert für diskret verteilte

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{k=1}^M w(x_k) x_k}{\sum_{k=1}^M w(x_k)}$$

hier: $w_N(N_1)$ bereits normiert!

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^N N_1 w_N(N_1)$$

Einsetzen von $w_N(N_1)$

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} N_1$$

Trick: Fasse zunächst p_1, p_2 als unabhängige Variable auf und leite.

$$N_1 p_1^{N_1} = p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1^{N_1})$$

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1 \left(\frac{\partial}{\partial p_1} p_1^{N_1} \right) p_2^{N_2}$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \right)$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1 + p_2)^N \quad \text{Binomialsatz!}$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1 + p_2)^N = p_1 N (p_1 + p_2)^{N-1}$$

$$= p_1 N$$

\uparrow
 $p_1 + p_2 = 1$

Schwankungen:

Definition:

$$\Delta N_1 = N_1 - \langle N_1 \rangle$$

Abweichung vom Mittelwert

$$\text{beachte: } \langle \Delta N_1 \rangle = \langle N_1 \rangle - \frac{\langle \langle N_1 \rangle \rangle}{\langle N_1 \rangle} \\ = 0$$

mittlere
quadratische Schwankung:

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle$$

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = \langle (N_1 - \langle N_1 \rangle)^2 \rangle$$

Zeigt, dass die quadrat. Schwankung
positiv ist!

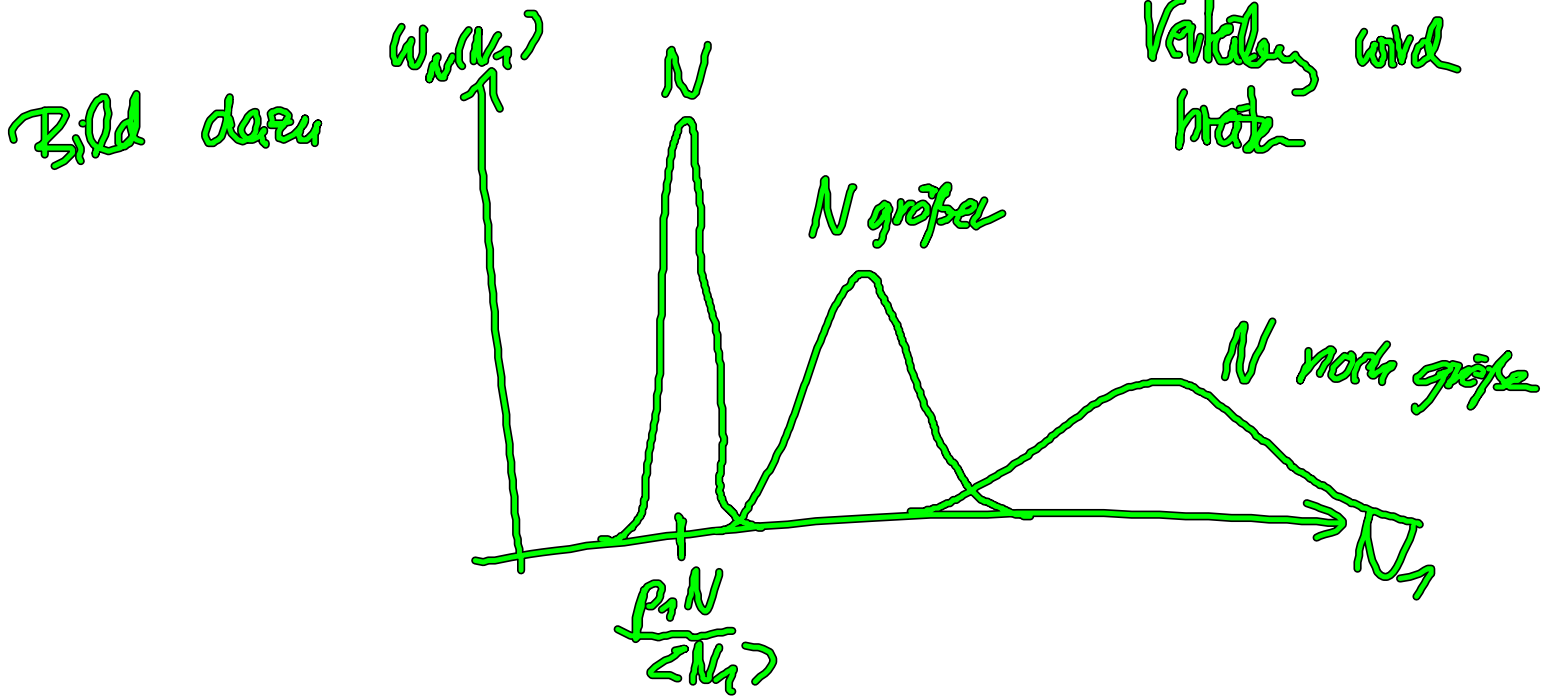
$$= \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \langle N_1 \rangle \rangle - \langle \langle N_1 \rangle N_1 \rangle \\ + \langle \langle N_1 \rangle^2 \rangle$$

$$= \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2 - \langle N_1 \rangle^2 + \langle N_1 \rangle^2 \\ = \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2$$



Speziell für die Binomialverteilung
findet man (\rightarrow Übung)

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = N p_1 p_2$$



Alternative zur direkten Auswertung
von Mittelwerten:

→ Charakteristische Funktion

allg.: gegeben sei Zufallsvariable x mit Werten x_l ,
Verteilung $W(x_l)$ diskret $l=1, \dots, M$

definiert:

$$f(k) = \langle e^{ikx} \rangle$$

$$= \sum_{l=1}^M e^{ikx_l} W(x_l)$$

$W(x_l)$
normiert!

es gilt:

$$\langle x^n \rangle = (-i)^n \frac{d^n f}{dk^n} \Big|_{k=0}$$

n-tes Moment der Variable

Beispiel: gewöhnlicher Mittelwert ($n=1$)

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= (-i) \frac{df}{dk} \Big|_{k=0} = (-i) \frac{d}{dk} \sum_{l=1}^M e^{ikx_l} w(x_l) \\ &= (-i) \sum_{l=1}^M ix_l e^{ikx_l} w(x_l) \end{aligned}$$

$$= \frac{-i^2}{1} \sum_l x_l e^{ikx_l} w(x_l) \Big|_{k=0}$$

$$= \sum_l x_l w(x_l)$$

entspricht früherer Definition des Mittelwertes?

Falls alle Momente existieren.

$$f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \left. \frac{d^n f}{dk^n} \right|_{k=0} = \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle$$

speziell Binomialverteilung:

$$\begin{aligned} f(k) &= \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} e^{ikN_1} \\ &= \sum_{N_1} \binom{N}{N_1} (p_1 e^{ik})^{N_1} p_2^{N_2} \\ &\rightarrow = (p_1 e^{ik} + p_2)^N \end{aligned}$$

Binomialatz

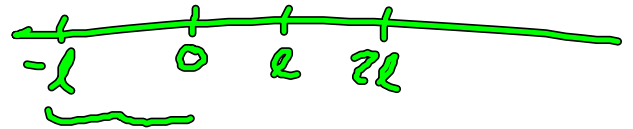
Mittelwert: $\langle N_1 \rangle = -i \left. \frac{df}{dk} \right|_{k=0} = \left[-iN (p_1 e^{ik} + p_2)^{N-1} \cdot i p_1 e^{ik} \right]_{k=0}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \langle N_1 \rangle &= \underbrace{-i^2}_1 N (p_1 + p_2)^{N-1} p_1 \\ &= p_1 N \quad \checkmark \end{aligned}$$

typisches Anwendungsbeispiel der Binomialverteilung

Zufallsbewegung ("Random walk")

z.B. in einer Dimension



Schritt konstanter Länge l

Wahrsch. für Schritt nach rechts: p_1
" " " " links p_2

Annahme: Schritte statistisch unabhängig
("Betrunkene")

$$\text{Wahrsch.: } W_N(N_1) = \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2}$$

N_1 : Zahl der Schritte nach rechts

Wahrsch., den Betrunkenen am Ort x zu finden

$$x = l \langle N_1 \rangle - l \langle N_2 \rangle$$

$$\Rightarrow x = l \langle N_1 \rangle - l \langle N_2 \rangle \stackrel{N=N_1+N_2}{=}$$

$$= 2 \langle N_1 \rangle - 2N + 2 \langle N_1 \rangle$$

$$= 2 \langle N_1 \rangle - 2N = 2N(2p_1 - 1)$$

$$\langle N_1 \rangle = p_1 N$$

$$= 2N(p_1 - p_2)$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$\Rightarrow x = 0$ falls $p_1 = p_2$, wie erwartet!

I.2. Von der Binomial- zur Gaussverteilung

Erinnerung: Bei Binomialverteilung $\langle N_1 \rangle = N p_1$
 $\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = N p_1 p_2$

Betrachte relative Schwankung

$$\text{Definition } \frac{\sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}}{\langle N_1 \rangle} = \frac{\sqrt{N p_1 p_2}}{N p_1} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \sqrt{\frac{1}{N}}$$

d.h. : Die relative Schwankung verschwindet für
 $N \rightarrow \infty$!!

Für sehr große N wird diese
'Binomialverteilung' schief lokalisiert

Wir werden sehen:

Dieses Verhalten der relativen Schwankung
("Gesetz der großen Zahlen") gilt auch unter
viel allgemeineren Bedingungen, also nicht für die
Binomialverteilung!

Ziel jetzt: Betrachte die Binomialverteilung für
sehr große N

Idee: Taylorentwicklung um das
Maximum

aber: Da $W_N(N_1)$ für große N "schief lokalisiert"
ist um $\langle N_1 \rangle$, ist es sinnvoll

den Logarithmus zu entwickeln!

Beispiel

$$f(n) = p^n = e^{n \ln p}$$

entwickle um irgendeinen Wert $n = \bar{n}$

$$\text{Taylor: } f(n) \approx \frac{f(\bar{n})}{p^{\bar{n}}} + \underbrace{f'(\bar{n})(n - \bar{n})}_{\ln p p^{\bar{n}}} + O((n - \bar{n})^2)$$

Für große \bar{n} werden die Koeffizienten wieder groß!

Taylor-Entw. des Logarithmus:

$$\ln f(n) = n \ln p$$

$$= \bar{n} \ln p + \ln p (n - \bar{n})$$

Keine höheren Terme

Anwendung auf den Logarithmus der Binomialverteilung

$$W_N(N_1) = \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2}$$

$$\ln W_N(N_1) = \ln N! - \ln N_1! - \ln N_2! + N_1 \ln p_1 + N_2 \ln p_2$$

Entwickle um $\langle N_1 \rangle = N p_1$

bei (zunächst) festem N

1. Ableitung:

$$\frac{d \ln W(N_1)}{dN_1} \Big|_{N_1 = \langle N_1 \rangle}$$

Betrachte:

$$\frac{d \ln N_1!}{dN_1} \approx \frac{\ln(N_1+1)! - \ln N_1!}{1} =$$

Annäherung durch Differenzenquotient
o.H. $N_1 \gg 1$

$$\begin{aligned} & \ln \frac{(N_1+1)!}{N_1!} \\ &= \ln(N_1+1) \\ &\approx \ln N_1 \end{aligned}$$

(alternativ)

$$\ln N_1! \approx N_1 \ln N_1 - N_1$$

(Stirling-Formel)

(Näherung für $N_1 \gg 1$)

analog

$$\frac{d \ln N_2!}{dN_1} = \frac{d \ln (N - N_1)!}{dN_1}$$

$$\approx \frac{\ln(N - N_1 - 1)! - \ln(N - N_1)!}{1}$$

$$= -\ln(N - N_1)$$

Insgesamt in dieser Näherung:

$$\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1} \approx -\ln N_1 + \ln(N - N_1) + \ln p_1 - \ln p_2$$

Auswertung bei $N_1 = \langle N_1 \rangle = N p_1$

$$\Rightarrow \frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1} \Big|_{\langle N_1 \rangle} = -\ln N p_1 + \ln(N - N p_1) + \ln p_1 - \ln p_2$$

$$= -\ln p_1 - \ln p_1 + \ln p_1 + \ln p_2 + \ln p_1 - \ln p_2$$

$$\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1} \Big|_{\langle N_1 \rangle} = 0$$

O.K., weil wir uns ein Extremum entwickeln

2. Ableitung:

$$\frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1^2} \Big|_{\langle N_1 \rangle} = \dots = -\frac{1}{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle} < 0$$

da Maximum:

Taylorentwicklung des Logarithmus

$$\begin{aligned} \ln W_N(N_1) &= \ln W_N(\langle N_1 \rangle) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle} (N_1 - \langle N_1 \rangle)^2 \\ &\quad + \mathcal{O}((N_1 - \langle N_1 \rangle)^3) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \langle (\Delta N_1)^2 \rangle = N/p_1^2$$