

## 1.2 Differentiation

z.B. Ort  $\xrightarrow{x}$  Geschwindigkeit  $\xrightarrow{\dot{x}}$  Beschleunigung  $\xrightarrow{\ddot{x}}$

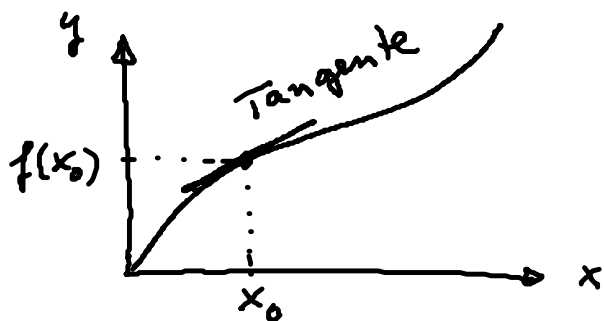
Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx}$$

z.B.  $f(x) = x^2$

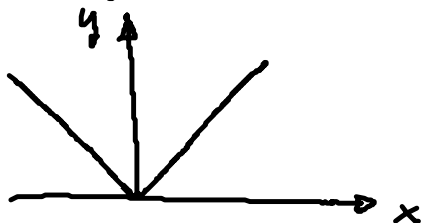
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Def.:  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt an der Stelle  $x$  differenzierbar, falls der Grenzwert  $f'(x)$  existiert.



$f'(x)$  = Steigung der Tangente

Gegenbeispiel:



$$f(x) = |x|$$

stetig, aber nicht diff.-bar  
bei  $x = 0$

Ableitungsregeln: Seien  $f(x)$  und  $g(x)$  überall diff. bare Funktionen

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \quad \text{Produktregel}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{Quotientenregel} \\ (\text{Vor. } g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D)$$

Sei  $g(f(x)) \equiv (g \circ f)(x)$ :

$$(g(f(x)))' = (g' \circ f) f' = \underset{\text{äußere Fkt.}}{g'(f(x))} \underset{\text{innere Fkt.}}{f'(x)} \quad \text{Kettenregel}$$

Folgerung für  $g(x) = f^{-1}(x)$ :

$$\begin{array}{l} f^{-1}(f(x)) = x \\ (f^{-1}(f(x)))' = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Andererseits nach Kettenregel:} \\ (f^{-1}(f(x)))' = (f^{-1})'(\underbrace{f(x)}_y) \cdot f'(x) \stackrel{!}{=} 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{Umkehrregel}$$

Beispiele: 1)  $\frac{d}{dx} a^x = ?$

$$\text{benutze } a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$$

$$\text{Kettenregel } (a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

$$\text{äußere Fkt. } e^y \quad \text{mit } y = x \ln a$$

$$\text{innere Fkt. } y = x \ln a$$

2) Quotientenregel:  $\frac{d}{dx} \tan x = ?$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3)  $(\arctan x)' = ?$  benutze  $\tan(\arctan x) = x$   
 $(\tan(\underbrace{\arctan x}_y))' = 1$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y$$

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

### Höhere Ableitungen

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f^{(2)}(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

Def.:  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt n-mal diff. bar, falls

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x) \quad \forall x \in D \text{ existiert}$$

Def.:  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt n-mal stetig diff. bar

falls außerdem  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  auf  $D$  stetig ist.

### 1.3 Taylor-Entwicklung

Potenzreihenentwicklung einer Fkt.  $f(x)$  um  $x=a$ :

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \underline{\text{Taylor-Reihe}}$$

Var.:  $f$  beliebig oft diff. bar.

NB:  $T_f(x)$  konvergiert gegen  $f(x)$ , falls  
das Restglied  $R_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_N(x)$$

### Beispiele

1)  $f(x) = e^x$  ;  $f^{(n)}(x) = e^x$

Taylor-Entwicklung um  $x=0$ :

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (\text{konvergent } \forall x \in \mathbb{R})$$

2)  $f(x) = \sin x$

Entwickl. um  $x=0$ :

$$f'(x) = \cos x \quad f'(0) = 1$$

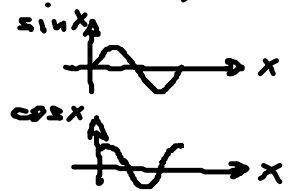
$$f''(x) = -\sin x \quad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \quad f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad f^{(4)}(0) = 0$$

...

$$T_f(x) = \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k$$



Praktisch: Abbruch nach einigen wenigen Termen

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots$$

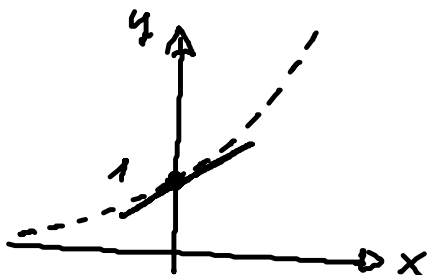
reicht („Entwicklung bis zur n-ten Ordnung.“)

$$\text{z.B. } e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$= 1 + x + O(x^2)$$

$$\approx 1 + x \quad (\text{für } |x| \ll 1)$$

Entwickl. bis zur ersten Ordnung



kinet. Energie eines relativist. Teilchens:

Gesamtenergie  $E = mc^2$ ,  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$

$m_0$  Ruhemasse  
 $v$  Teilchengeschw.  
 $c$  Lichtgeschw.

kinet. Energie:

$E_{kin} = E - E_0$  mit  $E_0 = m_0 c^2$  Ruheenergie

$$= mc^2 - m_0 c^2$$

$$= m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - 1 \right)$$

Taylorentw. der Wurzel um  $x = \frac{v}{c} = 0$  :

$\frac{v}{c} \ll 1$  :  $f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2} f''(0) + O(x^3)$

$$= 1 - \underbrace{\frac{1}{2} (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} (-2x)}_0 \Big|_{x=0}$$

$$+ \frac{x^2}{2} \left[ \underbrace{\frac{3}{4} (1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} (-2x)}_0 - \frac{(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}}{2} (-2) \right]_{x=0}$$

$f(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2}$  für  $x \ll 1$  eingesetzt in  $E_{kin}$ :

$$E_{kin} \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right) - 1 \right)$$

$$\approx \frac{1}{2} m_0 v^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

↓  
 klass. nichtrelativ. Mechanik  
 ↓  
 systemat. Methode, um Korrekturen der nichtrelat. Mech. (höhere Ordnungen) zu erhalten.

- Nichtrelativist. Mechanik als Grenzfall ( $\frac{v}{c} \ll 1$ ) der relativist. Mechanik
- Störungstheorie (Taylorentw. nach einem kleinen) Parameter

## 1.4 Asymptotisches Verhalten

Häufig braucht man nur das Verhalten einer Funktion bei sehr kleinem oder sehr großem Argument

Beispiel :  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

a) Taylorentwicklung um  $x=0$  :  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + O(x^4)\right) = 1$$

b) Regel von L'Hospital :

b1) Sei  $f(x_0) = 0$ ,  $g(x_0) = 0$  und  $g'(x_0) \neq 0$  in einer Umgeb. v.  $x_0$ .

$$\text{Dann : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

$$\text{hier : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

b2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Asymptot. Verhalten :

z.B.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , Verl. für  $x \rightarrow \infty$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^{-2}}}_{g(y)} \quad , \quad y := x^{-2}$$
$$g(y) = \frac{1}{1+y}$$

geometr. Reihe  $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + O(y^4)$

konvergent für  $|y| < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y} \approx 1-y = 1 - \frac{1}{x^2}$$

eingesetzt in  $f(x)$ :

$$f(x) \approx \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \dots\right) \approx \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

führender Term  
für  $x \rightarrow \infty$



Weitere wichtige Potenzreihenentwicklungen:

$$(1 \pm x)^m \approx 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + O(x^3) \quad |x| \ll 1$$

binomische Reihe, gilt auch für gebrochenes  $m$   
(nicht nur  $m \in \mathbb{Z}$ )

z.B.

$$(1-x)^{-1/2} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad (\text{vgl. relativist. Energie})$$