1.5 Komplexe Zahlen

$z = x + iy \quad \in \mathbb{C}$ $\qquad$ x Realteil

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ y Imaginärteil

Spezialfälle:

$y = 0$: $z \in \mathbb{R}$ reell

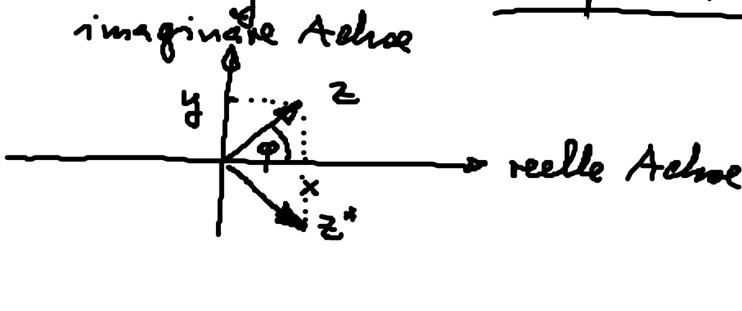
$x = 0$: $z = iy$ rein imaginär , $z = i$ imaginäre Einheit ($i^2 = -1$)

Erweiterung des Zahlenraums $\mathbb{R}$ notwendig, damit $\sqrt[n]{z_0}$ stets n Lösungen in $\mathbb{C}$ hat.

z.B. $z^2 = -1$ hat die 2 Lösungen $z = i$, $z^* = -i$

komplex konjugierte Zahl : $z^* = x - iy$

Darstellung in der <u>komplexen Zahlenebene</u>:



$\arctan \frac{y}{x} = \varphi$

Polardarstellung $z = |z| e^{i\varphi}$, Betrag $|z| = \sqrt{zz^*}$

$= \sqrt{x^2 + y^2}$

Phase $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

Euler'sche Formel:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Beweis: Potenzreihenentw. von $e^{i\varphi}$

Speziell:

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

schönste Formel der Mathematik! ♡

$$z = |z| e^{i\varphi} = \underbrace{|z|\cos\varphi}_{x} + i\underbrace{|z|\sin\varphi}_{y}$$

Formel von Moivre:

$$z^n = (x+iy)^n = (|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi}$$

$$= |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

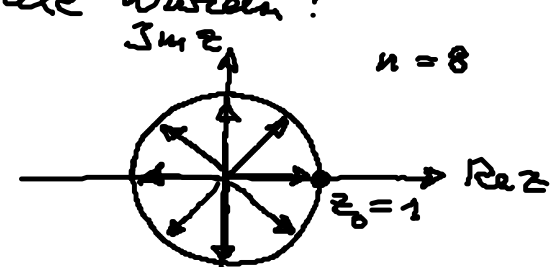
<u>Wurzel ziehen</u>:

Sei $z^n = z_0 \iff z = z_0^{1/n}$

Beispiel $z^n = 1 \iff z = e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

n komplexe Wurzeln!

Beweis: $z^n = e^{i2\pi k} = 1$



Verallgemeinerung der reellen Funktionen:

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ <u>komplexe Fkt.</u>

z.B. $f(x) = f(i\omega t) = e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$

oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$t \mapsto f(t) = e^{i\omega t}$ ω Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi\nu$)

<u>Anwendung</u>: Schwingungen und Wellen

$e^{i\omega t}$ $e^{i(kx + \omega t)}$

(elektrodyn. Wellen, quantenmech. Materiewellen, kontinuumsmech. Wellen)

k Wellenzahl ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

λ Wellenlänge

2. Gewöhnliche Differentialgleichungen

<u>Motivation</u>: Dynamische Grundgln. in der Physik haben die Form von Differentialgln. (zeitliche Entwickl.)

z.B. Mechanik: Bewegung eines Massenpktes

$$\boxed{m \underbrace{\frac{d^2}{dt^2} x(t)}_{a(t)\text{ Beschleunigung}} = F(x(t))}$$

Newton'sche Beweg.gl.

m Masse
F Kraft
x Ort, t Zeit

- <u>gewöhnl. Dgl.</u>

z.B. Quantenmech.: Dynamik der Wellenfkt. eines Teilchens $\psi(x,t) \in \mathbb{C}$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x,t)$$

zeitabh. Schrödinger-gl.

- <u>partielle Dgl.</u>: Ableitung nach mehreren Var. → Kap. 3

z.B. Elektrodynamik: zeitliche Entwicklung der Felder

$\underline{E}(\underline{r},t)$ el. Feld
$\underline{B}(\underline{r},t)$ magn. Induktion

} Maxwell-glen.

→ Vektoranalysis → Kap. 4, 5

- einzelne Dgl. oder Systeme von Dgl.
- lineare Dgl. oder nichtlineare Dgl.
- Ordnung der Dgl.: höchste auftretende Ableitung

2.1 Gewöhnliche Differentialgln. 1. Ordnung

$$\boxed{y'(x) = f(x,y)}$$

geg.: $f(x,y)$
gesucht $y(x)$

Beispiel: $y'(x) = x^2 + 2\sin(xy)$

Spezialfall: Falls f nur von x abhängt,

$y'(x) = f(x)$, folgt die Lösung durch Integration:

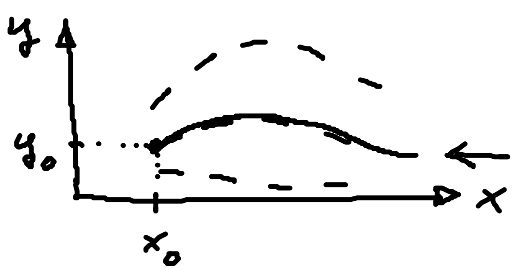
$$\Rightarrow y(x) = \int_{x_0}^{x} dx'\, f(x') + C \qquad C = y(x_0) \text{ Anfangswert)}$$

Beispiel: $y'(x) = x^3 + \cos x$

$$\Rightarrow y(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + \sin x - \tfrac{1}{4}x_0^4 - \sin x_0 + C$$

Betrachte nun $\boxed{y' = f(x,y)}$

geometr. Interpretation: Richtungsfeld $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ definiert in jedem Pkt. (x,y) eine Steigung.



← gesuchte Lösung:
Trajektorie $y(x)$ tangential zum Richtungsfeld, festgelegt durch Anfangsbed. $y(x_0)$

2.1.1 Lösung durch Separation der Variablen

Spezialfall $\boxed{y'(x) = f(x)\,g(y)}$, Dgl. faktorisiert

a) Nullstellen von $g(y)$: $y_1, y_2, \dots$
sind konstante Lösungen $y(x) = y_i$ der Dgl.

b) Für $g(y) \neq 0$

Separation der Var.: $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \Rightarrow \underbrace{\frac{dy}{g(y)}}_{\text{hängt nur von } y \text{ ab}} = \underbrace{f(x)\,dx}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}}$

Integration: $\int \frac{dy'}{g(y')} = \int dx' f(x')$

Anfangsbed. $y(x_0) = y_0$: $\int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} dx' f(x')$ ⊛

auflösen nach $y(x)$:
Sei $F(x)$ Stammfkt. von $f(x)$
sei $\phi(y)$ " " $\frac{1}{g(y)}$

⊛ $\Leftrightarrow \phi(y) - \phi(y_0) = F(x) - F(x_0)$

$\Leftrightarrow \phi(y) = F(x) \underbrace{- F(x_0) + \phi(y_0)}_{C}$

$\Leftrightarrow y(x) = \phi^{-1}(F(x) + C)$ Lösung

<u>Beispiele</u>: 1) $y'(x) = y^2$ Anf. bed. $x_0 = 0$
$y(x_0) = y_0 > 0$

d.h. $f(x) = 1$
$g(y) = y^2$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{y'^2} = \int_0^x dx'$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = x$

$\Leftrightarrow y(x) = \left(\frac{1}{y_0} - x\right)^{-1} = \frac{y_0}{1 - y_0 x}$

2) $y'(x) = e^y \sin x$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int dx \sin x \Rightarrow \int_{y_0}^{y} dy' e^{-y'} = \int_{x_0}^{x} dx' \sin x'$$

$$\Leftrightarrow \left[-e^{-y'}\right]_{y_0}^{y} = \left[-\cos x'\right]_{x_0}^{x}$$

$$\Leftrightarrow -e^{-y} + e^{-y_0} = -\cos x + \cos x_0$$

$$\Leftrightarrow e^{-y} = \cos x + C$$

auflösen nach $y(x) = -\ln(\cos x + C)$

2.1.2 Lineare Diff. gl. 1. Ordnung

$\boxed{y'(x) = \lambda y(x)}$ linear in y, $\lambda = \underline{\underline{\text{const}}} \in \mathbb{R}$

z.B. radioaktiver Zerfall : x = Zeit t

$N(t)$ Zahl der zur Zeit t noch nicht zerfallenen Atome

$N'(t) = \frac{dN}{dt} = -\alpha N(t)$ α Zerfallsrate

Lösungsansatz für lin. Dgl. mit konst. Koeffizienten:

$y(x) = C e^{\lambda x}$, denn $y'(x) = \lambda C e^{\lambda x} = \lambda y$

Anf. bed. $y(x_0) = y_0$:

$y_0 = C e^{\lambda x_0} \Leftrightarrow C = y_0 e^{-\lambda x_0}$

$\Rightarrow y(x) = y_0 e^{\lambda(x - x_0)}$ Lösung allg. Form:

$$\boxed{y'(x) = a(x)y(x) + b(x)}$$ inhomog. lin. Dgl. 1. Ordnung

geg. $a(x)$, $b(x)$ Inhomogenität

gesucht $y(x)$

z.B. mech. Teilchen mit Geschw. $y = v(t)$ unter Einfluss der äußeren Kraft $F^a(t)$ sowie der Reibungskraft $F^r = -\gamma v(t)$,

Stokes'sche Reibung

Newton: $m\frac{dv}{dt} = F^r(t) + F^a(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m} v + \frac{1}{m} F^a(t)$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$ allg. Form