

$$\boxed{y'(x) = a(x)y(x) + b(x)}$$
 inhomogene lin. Dgl.
1. Ordnung

Lösungsstrategie:

(i) Lösung der homog. Gl. $y'(x) = a(x)y(x)$
durch Separ. der Var. ($g(y) = y$)

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx a(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln y = A(x) + \tilde{C} \quad \text{mit } A(x) \text{ Stammfkt. von } a(x)$$

$$\Leftrightarrow y(x) = e^{A(x) + \tilde{C}} = C e^{A(x)} \quad \underline{\text{allg. L\u00f6s. der hom. Gl.}}$$

(ii) Lösung der inhom. Gl. (keine Separ. m\u00f6glich!):
finde eine spezielle inhomogene L\u00f6sung $\varphi(x)$,
dann ist

$$y(x) = \underbrace{C \varphi(x)}_{\substack{\text{allg. L\u00f6s.} \\ \text{der hom.} \\ \text{Gl. } \varphi(x) = e^{A(x)}}} + \underbrace{\varphi(x)}_{\substack{\text{spezielle} \\ \text{L\u00f6s. der} \\ \text{inhom. Gl.}}} \quad \text{die allg. L\u00f6s. der} \\ \text{inhomog. Dgl.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} y'(x) &= C \varphi'(x) + \varphi'(x) \\ &= a(x) C \varphi(x) + [a(x) \varphi(x) + b(x)] \\ &= a(x) \underbrace{[C \varphi(x) + \varphi(x)]}_{y(x)} + b(x) \end{aligned}$$

□

Spezielle inhom. L\u00f6s.:

$$\text{L\u00f6sungsansatz } \varphi(x) = u(x) e^{A(x)} \quad (\underline{\text{Variation der Konst. } C})$$

↓

bestimme $u(x)$ so, dass φ die inhom. Dgl. erf\u00fcllt

d.h.

$$\frac{d}{dx} (u(x) e^{A(x)}) \stackrel{!}{=} a(x) u(x) e^{A(x)} + b(x)$$

$$\frac{du}{dx} e^{A(x)} + u(x) e^{A(x)} \frac{dA}{dx} = a(x) u(x) e^{A(x)} + b(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = e^{-A(x)} b(x)$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \int dx' e^{-A(x')} b(x') + \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = e^{\int_{x_0}^x dx' a(x')} \left(\int_{x_0}^x dx' e^{-\int_{x_0}^{x'} dx'' a(x'')} b(x') + \underbrace{\varphi(x_0)}_{\varphi_0} \right)$$

Beweis, dass $\varphi(x)$ tatsächlich die inhom. Dgl. erfüllt:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= e^{\int_{x_0}^x dx' a(x')} a(x) \left(\int_{x_0}^x dx' e^{-\int_{x_0}^{x'} dx'' a(x'')} b(x') + \varphi(x_0) \right) \\ &+ \underbrace{e^{\int_{x_0}^x dx' a(x')} - \int_{x_0}^x dx'' a(x'')}_{1} b(x) \end{aligned}$$

$$= a(x) \varphi(x) + b(x) \quad \square$$

Beispiel:

$$1) \quad y' = 2xy + x^3$$

Lösung der homog. Gl. $y' = 2xy$: $\frac{dy}{y} = 2x dx$

$$\Rightarrow y = y_0 e^{\int_{x_0}^x dx' 2x'} = y_0 e^{x^2 - x_0^2} = C e^{x^2}$$

Spezielle Lösung der inhom. Gl.: $\varphi(x_0) = \varphi_0$

$$\varphi(x) = e^{\int_{x_0}^x dx' 2x'} \left(\int_{x_0}^x dx' e^{-\int_{x_0}^{x'} dx'' 2x''} \cdot x'^3 + \varphi_0 \right)$$

$$= e^{\int_{x_0}^x dt e^{-t^2} t^3}$$

2) Mech. Teilchen mit verallg. Reibung u. äußerer Kraft

$$\dot{v}(t) + \gamma(t)v(t) = f(t)$$

zeitabh.
Reib.koeff.

$$e^{-\int_0^t \gamma(t') dt'}$$

homog. Problem: $\dot{v} = -\gamma(t)v \Rightarrow v(t) = Ce^{-\int_0^t \gamma(t') dt'}$

inhom. Problem: Anf. bed. $v(0) = v_0$

$$v(t) = e^{-\int_0^t \gamma(t') dt'} \left(\int_0^t dt' e^{\int_0^{t'} \gamma(t'') dt''} f(t') + v_0 \right)$$

Beiträge der äußeren Kraft von $t'=0$ bis t (gegenwart), gewichtet mit dem „Propagator“ $e^{\int_0^{t'} \gamma(t'') dt''}$ (Systemantwort auf äußere Kraft = linear Response)

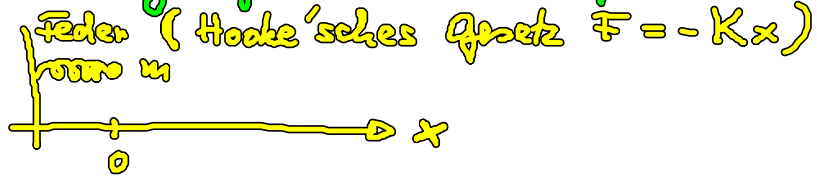
z.B. für $\gamma = \text{const.}$: $v(t) = \int_0^t dt' e^{-\gamma(t-t')} f(t') + v_0$

gedächtnisterm
„memory kernel“

2.1.3 Systeme von Differentialgl. 1. Ordnung

Motivation: a) Zurückführung von Dgl. 2. Ordnung auf Systeme von Dgl. 1. Ordnung

Beispiel: Schwingung eines Massepunktes



Newton'sche Bewegungsgl. $m\ddot{x} = -Kx$ lin. Dgl. 2. Ordnung

Impuls $p(t) := m\dot{x} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{m} p \\ \dot{p} = -Kx \end{cases}$$

2 gekoppelte Dgl.
1. Ordnung

allg. $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(x, y_1, y_2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{mit } y_1 = y(x) \\ y_2 = y'(x) \\ \text{System 1. Ordn.} \end{array}$$

dynam. System: $\dot{\underline{y}} = \underline{F}(t, \underline{y}) \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^2, t \text{ Zeit}$
2-dim. Vektorfeld

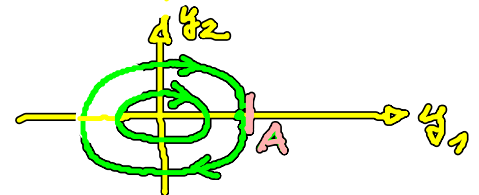
NB: Für eindeutige Lösung: 2 Anf. bed. $y_1^0 = y(x_0)$
 $y_2^0 = y'(x_0)$

harmon. DSE.: $\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}$

geometr. Veranschaulichung in der (y_1, y_2) Phasenebene:

Trajektorien (Bahnkurven):

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}$$



Für feste Energie (\triangleq Amplitude A) legt Phase φ den Anfangspht. fest.

- b) gekoppelte Systeme von Dgl.: gekoppelte Teilchen (Wechselwirkung)
- Mechanik (Quantenmechanik) z.B. Coulomb-WW, Gravit.-WW, Federn
viele Teilchen

2.2 lineare Differentialgl. 2. Ordnung

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

Inhomogenität

Lösungsstrategie:

(i) Allg. Lösung der homog. Dgl.

$$y(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$$

Die Funktionen $\varphi_1(x)$ u. $\varphi_2(x)$ bilden ein Fundamentalsystem

(ii) Addiere eine spezielle Lösung $\psi(x)$ der inhom. Dgl.

Spezialfall: homogene Dgl. 2. Ordn. mit konst. Koeff. a_1, a_2

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0$$

z.B. Schwingungen eines Massenpendels mit Reibung

$$\boxed{m\ddot{x} = -Kx - \gamma\dot{x}} \quad \underline{\text{gedämpfter harmon. Dsz.}}$$

$$K, \gamma > 0$$

Lösungsansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow m\lambda^2 e^{\lambda t} = -K e^{\lambda t} - \gamma\lambda e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m\lambda^2 + \gamma\lambda + K = 0} \quad \underline{\text{charakteristische Gl.}}$$

$$\text{Lösung } \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{K}{m}}$$

Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Fundamentalsystem der homog. Gl.:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$$

a) ungedämpfte Fall: $\gamma = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{K}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{K}{m}} = \pm i\omega \quad (K > 0)$$

Rein imaginär

allg. Lösung:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

harmon. Schwingung
($\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$)

$$= (c_1 + c_2) \cos \omega t + i(c_1 - c_2) \sin \omega t$$