Gedämpfter harmon. Osz.:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m} p \\ \dot{p} &= -Kx - \frac{\gamma}{m} p \end{aligned}}$$

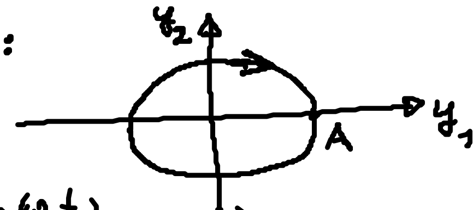
a) <u>Spezialfall $\gamma = 0$</u> (ungedämpft):

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -K & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Eigenvektoren $\underset{\sim}{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ im\omega_0 \end{pmatrix}$, $\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -im\omega_0 \end{pmatrix}$

allg. Lösung $\underline{y}(t) = C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ im\omega_0 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + C_- \begin{pmatrix} 1 \\ -im\omega_0 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t}$

<u>dyn. System</u>:



$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ -m\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{y}(0) = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$C_+ + C_- = A$$

$$im\omega_0 (C_+ - C_-) = 0$$

$$\Rightarrow C_+ = C_- = \frac{A}{2}$$

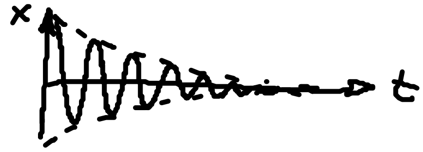
b) <u>schwache Reibung</u> $\gamma < 2m\omega_0 \iff \frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{K}{m} < 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\sqrt{\underbrace{\frac{K}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}_{>0}} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}}_{=:\omega < \omega_0}$$

allg. Lösung

$$x(t) = c_+ e^{-\frac{\gamma}{2m}t} e^{i\omega t} + c_- e^{-\frac{\gamma}{2m}t} e^{-i\omega t}$$

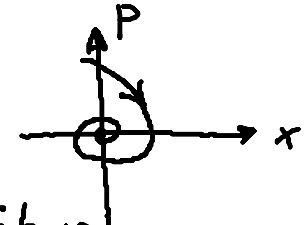
<u>gedämpfte harmon. Schwingung</u>



dynam. System: $\dot{x} = \frac{1}{m} p$

$$\dot{p} = -m\omega_0^2 x - \frac{\gamma}{m} p$$

Phasenporträt: Trajektorien sind Spiralen



Fixpunkt = Ursprung ist <u>stabiler Fokus</u> (Strudelpunkt)

c) <u>starke Reibung</u> $\gamma > 2m\omega_0 \iff \frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{K}{m} > 0$

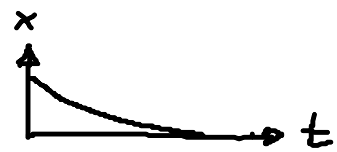
$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{K}{m}}}_{\text{reell},\ < \frac{\gamma}{2m}}$$

beide $\lambda_1, \lambda_2 < 0$!

allg. Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

„<u>überdämpfte Lösung</u>"



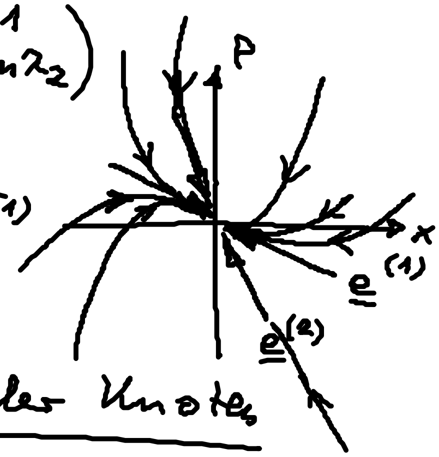
exponentiell abklingend

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} -\lambda_i & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & -\frac{\gamma}{m} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^{(i)} \\ e_2^{(i)} \end{pmatrix} = 0$

$$m\lambda_i e_1^{(i)} = e_2^{(i)} \iff \underline{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ m\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ m\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Phasenporträt: Sei $|\lambda_1| < |\lambda_2|$

fast alle Trajektorien tangential zu $\underline{e}^{(1)}$



Ursprung ist <u>stabiler Knoten</u>

2.4 Lineare inhomogene Systeme 1. Ordnung

$$\boxed{\underline{y}'(x) = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(x) + \underline{b}(x)}$$

$\underline{\underline{A}}$ $n\times n$ Matrix
$\underline{b}$ Inhomogenität

Analog zum Fall $n=1$ (§ 2.1.2):

(i) allg. Lösung der homog. Dgl.

$$\underline{\varphi}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\,\underline{C}_0 \quad \text{erfüllt} \quad \underline{\varphi}'(x) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\varphi}$$

(ii) Suche eine spezielle Lös. der inhom. Dgl.
zu geg. Anf. bed. $\underline{\psi}(x_0) = \underline{\psi}_0$

Ansatz $\underline{\psi}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\,\underline{u}(x)$ (Variation der Konst.)

Ergebnis: $\underline{u}(x)$ ist Stammfkt. von $\underbrace{e^{-\underline{\underline{A}}x}\,\underline{b}(x)}$

denn $\underline{\psi}' = \underline{\underline{A}}\,e^{\underline{\underline{A}}x}\underline{u} + e^{\underline{\underline{A}}x}\underline{u}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{\psi} + \underbrace{e^{\underline{\underline{A}}x}e^{-\underline{\underline{A}}x}}_{1}\underline{b}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\psi}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\left[\int_{x_0}^{x} dx'\left(e^{-\underline{\underline{A}}x'}\underline{b}(x')\right) + \underline{\psi}_0\right]}$$

2.5 Lineare homogene Systeme von Dgln. 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Beispiel: gekoppelte Schwingungen
(Mechanik, Festkörperphysik: Gitterschwing., Molekülschwingungen)

Newton'sche Beweg.gln. für N gekoppelte Osz.:

$$m_i\ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{N} K_{ij}\,x_j$$

$(i = 1, \dots, N)$

m_i Masse des i-ten Teilchens
x_i: Ort " "
K_{ij} Kopplungsmatrix

(ohne Reibung, Dämpfung)

Umschreiben auf 2N Dgl. 1. Ordnung
(für $x_i(t)$ u. $p_i(t) = m_i \dot{x}_i$)

<u>Spezialfall N=2</u> :

$m_1 \ddot{x}_1 = K_{11} x_1 + K_{12} x_2 \iff \ddot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2$

$m_2 \ddot{x}_2 = K_{21} x_1 + K_{22} x_2 \iff \ddot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2$

mit $A_{ij} := \frac{K_{ij}}{m_i}$

kompakt : $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}}$

Lösungsansatz $\underline{x}(t) = \underline{c}\, e^{-i\omega t}$ (Exponentialansatz wie bei System 1. Ordnung)

einsetzen in Dgl.:

$$\ddot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} c_1(-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \\ c_2(-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 c_1 e^{-i\omega t} \\ -\omega^2 c_2 e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = -\omega^2 \underline{x}$$

$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = -\omega^2 \underline{x}}$ Eigenwertproblem zum Eigenwert $\lambda = -\omega^2$

$\Rightarrow$ Vorgehen wie in § 2.3 (Syst. 1. Ordn.)

char. Polynom: $\det(\underline{\underline{A}} + \omega^2 \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0$

hier: $\underline{\underline{A}}$ 2×2 Matrix: $(-\omega^2)^2 + \omega^2 \operatorname{tr} A + \det \underline{\underline{A}} = 0$

$\operatorname{tr} \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{2} A_{ii}$ Spur der Matrix

Lösung $-\omega^2 = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12} A_{21}}$

$\Rightarrow$ 4 Lösungen $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$ (<u>Eigenfrequenzen</u>)

<u>Normalschwingungen</u> (Eigenmoden, Normalmoden)

Eigenvektoren $\underline{C}^{(1)}$, $\underline{C}^{(2)}$ zu ω_1, ω_2

Integrationskonstanten zur Erfüllung der Anfangsbed.:

$$\alpha_\pm, \ \beta_\pm$$

allg. Lösung:

$$\underline{x}(t) = \underbrace{\underline{C}^{(1)}\left(\alpha_+ e^{i\omega_1 t} + \alpha_- e^{-i\omega_1 t}\right)}_{\text{1. Eigenmode}} + \underbrace{\underline{C}^{(2)}\left(\beta_+ e^{i\omega_2 t} + \beta_- e^{-i\omega_2 t}\right)}_{\text{2. Eigenmode}}$$

Normalschwingungen sind entkoppelt

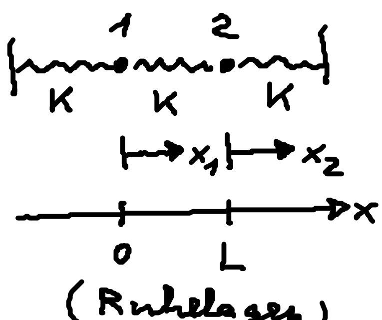
<u>Spezialfall</u>: 2 ungekoppelte Massenpkte

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -K_1 x_1 \\ m_2\ddot{x}_2 &= -K_2 x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{K_1}{m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{K_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

char. Char. $\quad -\omega^2 = \frac{A_{11}+A_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{K_1}{m_1} & \underline{C}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \omega_2^2 &= \frac{K_2}{m_2} & \underline{C}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{Eigenmoden} \\ \hat{=} \text{ ungekopp. Osz.} \end{array}$$

<u>nichttrivialer Fall</u>



$m_1 = m_2 = m$

3 gleiche Federkonstanten K

Newton:

$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - K(x_1 - x_2) = -2Kx_1 + Kx_2$$

$$m\ddot{x}_2 = -Kx_2 + K(x_1 - x_2) = -2Kx_2 + Kx_1$$

$$\ddot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2\frac{K}{m} & \frac{K}{m} \\ \frac{K}{m} & -2\frac{K}{m} \end{pmatrix}$$

Lösung der Eigenwertgl.:

$$-\omega^2 = -\frac{4K}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{-2K}{m}+\frac{2K}{m}\right)^2}_{0}+\left(\frac{K}{m}\right)^2} = -\frac{2K}{m} \pm \frac{K}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}\ , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems

Normalmoden: $\left(-\frac{2K}{m}+\omega_i^2\right)C_1^{(i)} + \frac{K}{m}C_2^{(i)} = 0$

$$\underline{C}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zu } \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$\circ\!\!\rightarrow \quad \circ\!\!\rightarrow$

gleichphasige Schwing. (wie ungekoppelte Osz.) Schwerpkts. schwing.

$$\underline{C}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ zu } \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

$\circ\!\!\rightarrow \quad \leftarrow\!\!\circ$

gegenphasige Schwing. (Relativschwing.)

3. Partielle Differentialgleichungen und Fourieranalyse

Jetzt: Dgln. für Funktionen mehrerer Variablen

$$u : \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\underline{x}, t) \longmapsto u(\underline{x}, t)$$

Ort $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$

Zeit $t \in \mathbb{R}$

partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv u_t$ Zeitableitung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &\equiv u_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &\equiv u_y \\ \frac{\partial u}{\partial z} &\equiv u_z \end{aligned}\right\} \text{ Ortsableitungen } \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. partielle Ableitungen: u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, ...

Partielle Dgl.: $F(u, u_t, u_x, u_y, u_z, u_{tt}, \ldots, t, \underline{x}) = 0$

gesucht $u(\underline{x}, t)$