

Gedämpfte harmon. Dsz.:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{m} p \\ \dot{p} = -Kx - \frac{\gamma}{m} p \end{cases}$$

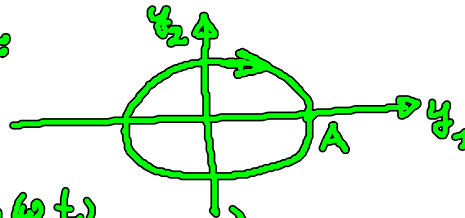
a) Spezialfall $\gamma = 0$ (ungedämpft):

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -K & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Eigenvektoren $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ im\omega_0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -im\omega_0 \end{pmatrix}$

allg. Lösung $\underline{y}(t) = C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ im\omega_0 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + C_- \begin{pmatrix} 1 \\ -im\omega_0 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t}$

dyn. System:



$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ -m\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{y}(0) = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$C_+ + C_- = A$$

$$im\omega_0 (C_+ - C_-) = 0$$

$$\Rightarrow C_+ = C_- = \frac{A}{2}$$

b) schwache Reibung $\gamma < 2m\omega_0 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{K}{m} < 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{K}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}}_{>0} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}}_{=: \omega < \omega_0}$$

allg. Lösung

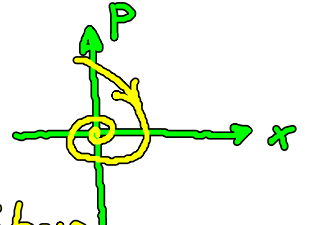
$$x(t) = C_+ e^{-\frac{\gamma}{2m} t} e^{i\omega t} + C_- e^{-\frac{\gamma}{2m} t} e^{-i\omega t}$$

gedämpfte harmon. Schwingung



dynam. System: $\dot{x} = \frac{1}{m} p$
 $\dot{p} = -m\omega_0^2 x - \frac{\gamma}{m} p$

Phasenporträt: Trajektorien sind Spiralen



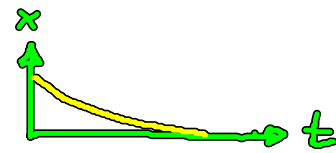
Fixpunkt = Ursprung ist stabiler Fokus
(Strudelzentrum)

c) starke Reibung $\gamma > 2m\omega_0 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}_{\text{reell, } < \frac{\gamma^2}{4m^2}}}$$

beide $\lambda_1, \lambda_2 < 0$!

allg. Lösung $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
„überdämpfte Lösung“



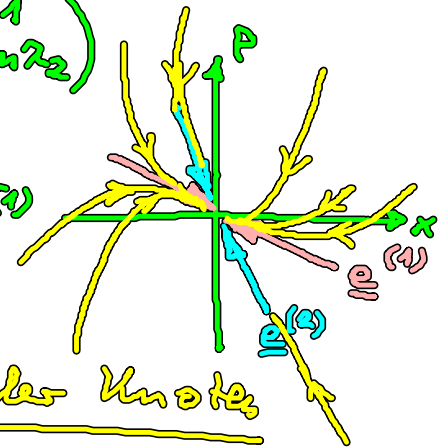
exponentiell abklingend

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} -\lambda_i & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & -\frac{\gamma}{m} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^{(i)} \\ e_2^{(i)} \end{pmatrix} = 0$

$$m\lambda_i e_1^{(i)} = e_2^{(i)} \Leftrightarrow \underline{e^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ m\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \underline{e^{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ m\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Phasenporträt: Sei $|\lambda_1| < |\lambda_2|$

fast alle Trajektorien tangential zu $\underline{e^{(1)}}$



Ursprung ist stabiler Knoten

2.4 Lineare inhomogene Systeme 1. Ordnung

$$\underline{y}'(x) = \underline{A} \underline{y}(x) + \underline{b}(x)$$

\underline{A} $n \times n$ Matrix
 \underline{b} Inhomogenität

Analog zum Fall $n=1$ (§ 2.1.2):

(i) allg. Lösung der homog. Dgl.

$$\underline{\varphi}(x) = e^{\underline{A}x} \underline{C}_0 \quad \text{erfüllt} \quad \underline{\varphi}'(x) = \underline{A} \underline{\varphi}$$

(ii) Suche eine spezielle Lsg. der inhom. Dgl.

zu geg. Anf. bed. $\underline{\varphi}(x_0) = \underline{\varphi}_0$

Annahme $\underline{\varphi}(x) = e^{\underline{A}x} \underline{u}(x)$ (Variation der Konst.)

Ergebnis: $\underline{u}(x)$ ist Stammfkt. von $e^{-\underline{A}x} \underline{b}(x)$

$$\text{denn } \underline{\varphi}' = \underline{A} e^{\underline{A}x} \underline{u} + e^{\underline{A}x} \underline{u}' = \underline{A} \underline{\varphi} + \underbrace{e^{\underline{A}x} e^{-\underline{A}x}}_1 \underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi}(x) = e^{\underline{A}x} \left[\int_{x_0}^x dx' (e^{-\underline{A}x'} \underline{b}(x')) + \underline{\varphi}_0 \right]$$

2.5 Lineare homogene Systeme von Dgl. 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Beispiel: gekoppelte Schwingungen

(Mechanik, Festkörperphysik: Gitterschwing.,
Molekülschwingungen)

Newton'sche Beweg.gln. für N gekoppelte DSE.:

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^N K_{ij} x_j$$

($i=1, \dots, N$)

m_i Masse des i -ten Teilchens

x_i Ort " "

K_{ij} Kopplungsmatrix

(ohne Reibung, Dämpfung)

Umschreiben auf 2N Dgl. 1. Ordnung
(für $x_i(t)$ u. $p_i(t) = m_i \dot{x}_i$)

Spezialfall $N=2$:

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_{11} x_1 + k_{12} x_2$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_{21} x_1 + k_{22} x_2$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2$$

$$\text{mit } A_{ij} := \frac{k_{ij}}{m_i}$$

$$\text{kompakt : } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}}$$

Lösungsansatz $\underline{x}(t) = \underline{c} e^{-i\omega t}$ (Exponentialansatz wie bei System 1. Ordnung)

einsetzen in Dgl.:

$$\ddot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} c_1 (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \\ c_2 (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 c_1 e^{-i\omega t} \\ -\omega^2 c_2 e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = -\omega^2 \underline{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A} \underline{x} = -\omega^2 \underline{x}}$$

Eigenwertproblem zum
Eigenwert $\lambda = -\omega^2$

\Rightarrow Vorgehen wie in § 2.3 (Syst. 1. Ord.)

char. Polynom : $\det(\underline{A} + \omega^2 \mathbf{1}) \stackrel{!}{=} 0$

hier: \underline{A} 2x2 Matrix: $(-\omega^2)^2 + \omega^2 \text{tr} \underline{A} + \det \underline{A} = 0$

$$\text{tr} \underline{A} = \sum_{i=1}^2 A_{ii} \quad \text{Spur der Matrix}$$

$$\text{Lösung } -\omega^2 = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12} A_{21}}$$

⇒ 4 Lösungen $\pm\omega_1, \pm\omega_2$ (Eigenfrequenzen)

Normalschwingungen (Eigenmoden, Normalmoden)

Eigenvektoren $\underline{c}^{(1)}, \underline{c}^{(2)}$ zu ω_1, ω_2

Integrationskonstanten zur Erfüllung der Anfangsbed.: $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$

allg. Lösung:

$$\underline{x}(t) = \underline{c}^{(1)} (\alpha_+ e^{i\omega_1 t} + \alpha_- e^{-i\omega_1 t}) + \underline{c}^{(2)} (\beta_+ e^{i\omega_2 t} + \beta_- e^{-i\omega_2 t})$$

1. Eigenmode 2. Eigenmode

↑
Normalschwingungen sind entkoppelt

Spezialfall: 2 ungekoppelte Massenplättchen

$$m_1 \ddot{x}_1 = -K_1 x_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -K_2 x_2$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} -\frac{K_1}{m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{K_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

char. Char. $-\omega^2 = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{K_1}{m_1}$$

$$\omega_2^2 = \frac{K_2}{m_2}$$

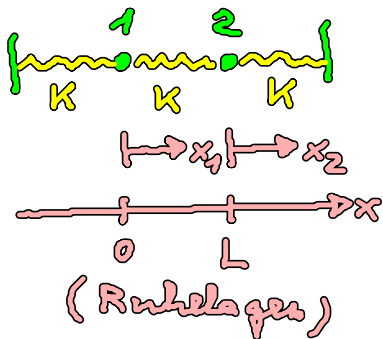
$$\underline{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenmoden

≙ ungekopp. Dsz.

nichttriviale Falle



$$m_1 = m_2 = m$$

3 gleiche Federkonstanten K

Newton:

$$m \ddot{x}_1 = -K x_1 - K(x_1 - x_2) = -2K x_1 + K x_2$$

$$m \ddot{x}_2 = -K x_2 + K(x_1 - x_2) = -2K x_2 + K x_1$$

$$\ddot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} -2\frac{K}{m} & \frac{K}{m} \\ \frac{K}{m} & -2\frac{K}{m} \end{pmatrix}$$

Lösung der Eigenwertgl.:

$$-\omega^2 = -\frac{4K}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{-2K}{m} + \frac{2K}{m}\right)^2}_{0} + \left(\frac{K}{m}\right)^2} = -\frac{2K}{m} \pm \frac{K}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}} \quad \text{Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems}$$

$$\text{Normalmoden: } \left(-\frac{2K}{m} + \omega_i^2\right) C_1^{(i)} + \frac{K}{m} C_2^{(i)} = 0$$

$$\underline{C}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{zu } \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$\circ \rightarrow \quad \circ \rightarrow$
gleichphasige Schwingung
(wie ungekoppelte DGG)
Schwerph. - Schwingung.

$$\underline{C}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{zu } \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

$\circ \rightarrow \quad \leftarrow \circ$
gegenphasige Schwingung.
(Relativschwingung.)

3. Partielle Differentialgleichungen und Fourieranalyse

Jetzt: Dgl. für Funktionen mehrerer Variablen

$$u: \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \mapsto u(x, t)$$

$$\text{Ort } x \in \mathbb{R}^d \quad (d=1, 2, 3)$$

$$\text{Zeit } t \in \mathbb{R}$$

partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv u_t$

Zeitableitung

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \equiv u_z$$

Ortsableitungen

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. partielle Ableitungen: $u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, \dots$

Partielle Dgl.: $F(u, u_t, u_x, u_y, u_z, u_{tt}, \dots, t, \underline{x}) = 0$
gesucht $u(x, t)$