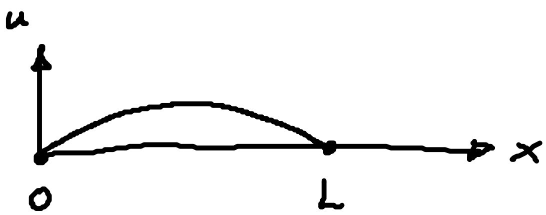
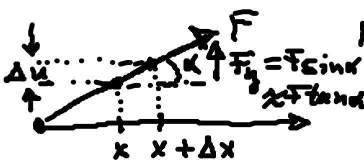
3.1 Schwingende Saite



Sei $u(x,t)$ die Auslenkung einer an beiden Enden eingespannten Saite



Netto-Kraft auf Seilstück Δx $\perp$ x-Achse:

$$F_{tot} = F_y(x+\Delta x) - F_y(x) = F\left(\sin\alpha\big|_{x+\Delta x} - \sin\alpha\big|_x\right)$$

$$\approx F\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta x}\Big|_x\right)$$

$$\xrightarrow{\Delta x \to 0} F\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{Newton: } m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$m = \varrho q\,dx\,, \quad c^2 := \frac{F}{\varrho q} \quad q \text{ Querschnitt}$$

Wellengleichung in $d=1$ Dim.:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)}$$

c Schallgeschw.

hyperbol. part. Dgl.

$(ac - (\frac{b}{2})^2 < 0$ in $a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy})$

gesucht $u(x,t)$ für $t > 0$

geg.: Anfangsprofil $u(x, t=0) = u_0(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\Big|_{t=0} = v_0(x)$$

Randbed. $u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0 \quad \forall t$

(Dirichlet)

Lösungsansatz (spezielle Lösungsklasse: stehende Wellen):

Separationsansatz $u(x,t) = y(x)\,z(t)$

(weil Orts- u. Zeitableitungen separieren)

einsetzen:

$$y(x)\ddot{z}(t) = c^2 y''(x) z(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\ddot{z}(t)}{c^2 z(t)}}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}} = \underbrace{\frac{y''(x)}{y(x)}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}}$$

muss für alle x und t gelten!

$\Rightarrow$ L.S. $=$ const. $= -k^2$ R.S. $=$ const. $= -k^2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \ddot{z}(t) &= -k^2 c^2 z(t) \\ y''(x) &= -k^2 y(x) \end{aligned}}$$

Anf.wert-problem

Randwert-problem $x = [0, L]$

2 gewöhnl. lin. Dgl. 2. Ordn. mit konstanten Koeff.

$\rightarrow$ Eigenwertproblem $\boxed{Ay = \lambda y}$, A Diff.op. (mit Rand-bed.)

$\Rightarrow$ allg. Lös.: $y(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)$

$$z(t) = \gamma_1 \cos(ckt) + \gamma_2 \sin(ckt)$$

$$u(x,t) = y(x) z(t)$$

Räuml. Randbed.: $u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0 \quad \forall t$

$$\Rightarrow \quad y(x=0) = y(x=L) = 0$$

$$\alpha \underbrace{\cos(k\cdot 0)}_{1} + \beta \underbrace{\sin(k\cdot 0)}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \qquad \beta \sin(kL) = 0$$

$$\overset{\beta \neq 0}{\Longrightarrow} \quad kL = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Eigenwertbed.: $\lambda_n = -k_n^2$

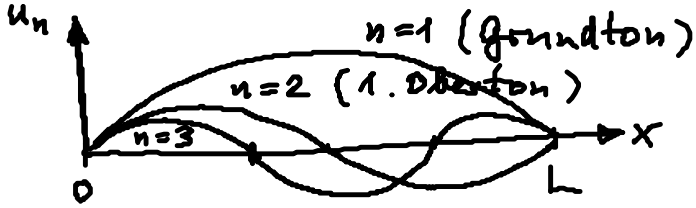
$$\boxed{k = k_n \equiv \frac{n\pi}{L}}$$

Wellenzahl (1dim. Wellenvektor)

Eigenlösungen:

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n\cos(ck_nt)+b_n\sin(ck_nt)\right]$$

mit $a_n := \beta\gamma_1$
$b_n := \beta\gamma_2$



stehende Wellen

Wellengl. ist linear in $u(x,t)$ $\Longrightarrow$ Linearkomb. von Lösungen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n\cos(\underset{\substack{\parallel \\ ck_n}}{\omega_n} t) + b_n\sin(\omega_n t)\right]$$

Dispersionsrelation $\boxed{\omega(k) = ck}$

Bestimme die Koeff. a_n, b_n aus den Anf. bed.

(i) $u(x,t=0) \overset{!}{=} u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

(ii) $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\Big|_{t=0} \overset{!}{=} v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ck_n b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

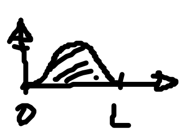
Wie bestimmt man die Koeff. a_n, b_n?

- Benutze Orthogonalität der Funktionen $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$:
  (analog Basis im Vektorraum $\mathbb{R}^n$)

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{nm} \quad \text{mit } \delta_{nm} = \begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$$

Kronecker-Symbol

$$\left(n=m: \frac{1}{L}\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{L}\int_0^L\cos^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{2}\right)$$



$$\frac{1}{L}\int_0^L \underbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}_{1}dx = 1$$

Löse (i) und (ii) nach a_n bzw. b_n auf mittels Orthog.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x)$$

$$\int_0^L dx\, \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \int_0^L dx\, \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) u_0(x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{L}{2}\delta_{nm}}_{\frac{L}{2}a_m} = \int_0^L dx\, u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

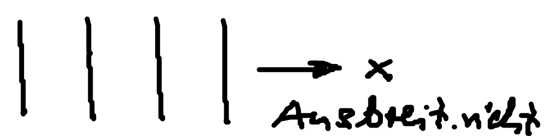
analog: $b_m = \frac{2}{L}\,\frac{1}{ck_m}\int_0^L dx\, v_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$

3.2 Laufende Wellen

Andere Lösungsklasse der Wellengl.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \qquad x \in \mathbb{R} \text{ (keine Randbed.)}$$

Ansatz: $u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ (ebene Wellen)



$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) &= -\omega^2 u \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) &= -k^2 u \end{aligned}\right\} \text{ eingesetzt: } -\omega^2 u = -c^2k^2 u$$

$\Rightarrow$ Dispersionsbeziehung $\boxed{\omega(k) = \pm ck}$

keine Eigenwertbed. (da keine Randbed.): $k \in \mathbb{R}$

Phase $\varphi(x,t) := kx - \omega t$

Phasengeschw. $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\varphi = \text{const}} = \frac{\omega}{k} = \pm c \qquad x = \frac{\omega}{k}t + \varphi_0$

Periode T : $u(x_0, t+T) \stackrel{!}{=} u(x_0, t) \Rightarrow \omega T = 2\pi$

Kreisfrequ. $\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$

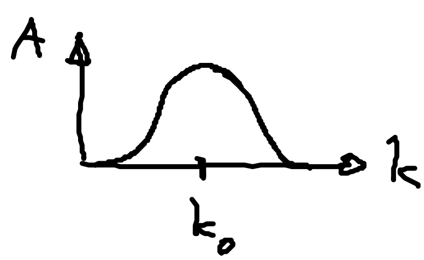
Wellenlänge λ : $u(x, t_0) \stackrel{!}{=} u(x+\lambda, t_0) \Rightarrow k\lambda = 2\pi$

Wellenzahl $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

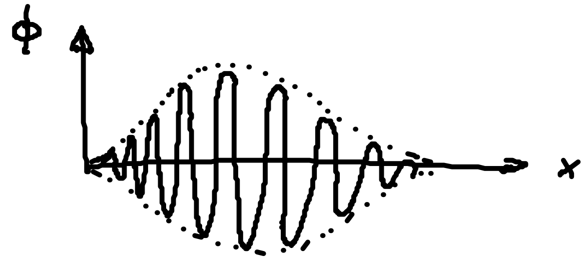
Wellenpaket: lineare Superposition von ebenen Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung, aber verschied. k:

$$\phi(x,t) = \int dk\, A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad \omega = \omega(k)$$

Sei $A(k)$ im k-Raum um k_0 lokalisiert:



$\Longrightarrow$



3.3 Fourier-Reihen, Fourier-Transformation

(eindimensional)

3.3.1 Fourier-Reihe

Jede im Intervall $[-a, a]$ quadratintegrable periodische Fkt. $f(x)$ $\left(\int_{-a}^{a} |f(x)|^2 dx < \infty \right)$

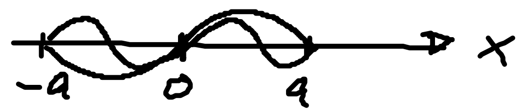
mit der Periode $2a$ lässt sich entwickeln:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x}} \quad \text{mit } k_n = n\frac{\pi}{a}$$

(lineare Zerlegung nach ebenen Wellen $e^{ik_n x}$:

$k_0 = 0 \Rightarrow$ const. Term

period. Randbed.



$k_{\pm 1} = \pm\frac{\pi}{a} \Rightarrow \underline{\lambda = 2a}$

$k_{\pm 2} = \pm\frac{2\pi}{a} \Rightarrow \underline{\lambda = a}$

....

Entwicklungskoeff.:

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-ik_m x}\, dx = \frac{1}{2a}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{-a}^{a} e^{i(k_n-k_m)x}\, dx}$$

$$n \neq m: \quad \frac{1}{i(k_n-k_m)}\underbrace{\left[e^{i(k_n-k_m)a} - e^{-i(k_n-k_m)a}\right]}_{2i\sin[\underbrace{(k_n-k_m)a}_{(n-m)\pi}] = 0}$$

$$n = m: \quad \int_{-a}^{a} dx = 2a$$

$$\Rightarrow \boxed{c_m = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-ik_m x}\, dx} \quad c_m \in \mathbb{C}$$

Falls $f(x)$ reell, muss gelten: $c_{-n} = c_n^*$, $c_0 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{ik_n x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{ik_n x} + c_0$$

$$= \underbrace{\sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} c_{-\tilde{n}} e^{-ik_{\tilde{n}}x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{+ik_n x}}_{2\,\mathrm{Re}\{\dots\}} + c_0 \qquad \square$$

Alternativ: Entwicklung nach cos u. sin (stehende Wellen)

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) \right)} \qquad k_n = n\frac{\pi}{a}$$

mit reellen Koeff. a_n, b_n

Periodizität: $f(x+2a) = \dots = f(x)$

<u>Entwickl. koeff</u>:

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} dx\, f(x) \cos(k_n x)$$

$$b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} dx\, f(x) \sin(k_n x)$$

folgt aus der Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^{a} dx\, \cos(k_n x) \cos(k_m x) = \delta_{nm}$$

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^{a} dx\, \sin(k_n x) \sin(k_m x) = \delta_{nm}$$

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^{a} dx\, \sin(k_n x) \cos(k_m x) = 0$$

Die Fkt.en $\{\cos(k_n x), \sin(k_n x)\}_{n=\mathbb{N}}$ bzw. $\{e^{ik_n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$

bilden eine <u>Basis</u> (orthonormiert, vollständig)

im <u>Vektorraum L^2-Funktionen</u>:

(i) Entwicklung $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x}$

$$\hat{=} \quad \underline{y} = \sum_{n=1}^{d} c_n \underline{\hat{e}}_n$$ im d-dim. Euklid. Vektorraum $\mathbb{R}^d$

(ii) Entw. koeff.

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} dx\, f(x)\, e^{-ik_n x}$$

$$\hat{=} \quad y_n = \sum_{i=1}^{d} \hat{e}_{n,i}\, y_i = \underline{\hat{e}}_n \cdot \underline{y} \equiv \langle \underline{\hat{e}}_n | \underline{y} \rangle$$

Skalarprodukt

$$\text{def. } \langle e_m | e_n \rangle := \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} dx\, e_m^*(x)\, e_n(x)$$

$$= \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} dx\, e^{i(k_n - k_m)x}$$

(iii) Basisfkt.en sind orthogonal zueinander u. normiert:

$$\langle e_m | e_n \rangle = \delta_{mn}$$

(iv) Die Basisfkt.en spannen den ganzen Vektorraum auf (Vollständigkeit):

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} dx\, f^*(x) f(x) = \langle f | f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

(Parseval'sche Gl.)