

5. Vektoranalysis

5.1 Vektorfelder

$\underline{A} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt Vektorfeld (oft $d=2,3$)
 $\underline{r} \mapsto \underline{A}(\underline{r})$

z.B. $\underline{E}(\underline{r})$ el. Feld, $\underline{B}(\underline{r})$ magn. Induktion,
 $\underline{v}(\underline{r})$ Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit.

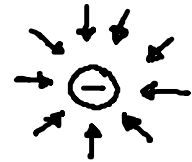
Spezialfall: skalares Feld $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 $\underline{r} \mapsto U(\underline{r})$

z.B. Dichte $\rho(\underline{r})$

Darstellung durch Feldlinien, z.B. el. Feld einer
Punktladung

Anwendung:

dyn. System $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$
(§2)



5.1.1 Gradient

geg. skalares Feld $\phi(\underline{r})$, $\underline{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Richtungsableitung (entlang eines beliebigen Einheits-
vektors \underline{v})

$$D_{\underline{v}}\phi := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(\underline{r} + t\underline{v}) - \phi(\underline{r})}{t} = \left(\frac{d}{dt} \phi(\underline{r} + t\underline{v}) \right)_{t=0}$$

$$\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{d}{dt} (x_i + tv_i) \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} v_i$$

Def.: Gradient $\text{grad } \phi(\underline{r}) \equiv \underline{\nabla} \phi(\underline{r}) := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \underline{e}_i$
 $\underline{\nabla}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 \uparrow Nabla-Operator \uparrow Einheitsvektor des kartes. Koord. systems

Zus. hang mit Richtungsableitung:

$$D_{\underline{v}} \phi(\underline{r}) = \underline{\nabla} \phi(\underline{r}) \cdot \underline{v}$$

Gradient in krummlinigen Koord. (u, v, w)

$$(\underline{\nabla} \phi)_u = \underline{e}_u \cdot \underline{\nabla} \phi = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}}{|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}|} \cdot \underline{\nabla} \phi = \frac{1}{g_u} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \underline{\nabla} \phi = \frac{1}{g_u} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

\uparrow metr. Koeff. g_u

$$\Rightarrow (\underline{\nabla} \phi)_u = \frac{1}{g_u} \frac{\partial \phi}{\partial u}$$

$$\text{also } \underline{\nabla} \phi = \left(\frac{1}{g_u} \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{1}{g_v} \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{1}{g_w} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)$$

Anwendung: konservative Kraft

Newton'sche Gl. $m \underline{\ddot{r}} = \underline{F}(\underline{r}(t))$ (Mechanik)

Def.: Eine Kraft heißt konservativ, wenn sie Gradient eines skalaren Potenzials ϕ ist:

$$\underline{F}(\underline{r}) = - \underline{\nabla} \phi(\underline{r})$$

Beispiele: (i) Federkraft $\underline{F} = -k(\underline{r} - \underline{r}_0) \Rightarrow \phi(\underline{r}) = \frac{k}{2}(\underline{r} - \underline{r}_0)^2$
 harmon. Pot.

(ii) Gravitationskraft $\underline{F} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$ Gravit. konst. γ
 Massen m_1, m_2
 $\Rightarrow \phi(\underline{r}) = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r}$ $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |\underline{r}|$

$$\text{denn } -\underline{\nabla}\phi(\underline{r}) = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r^2} \underline{\nabla}r = -\gamma m_1 m_2 \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

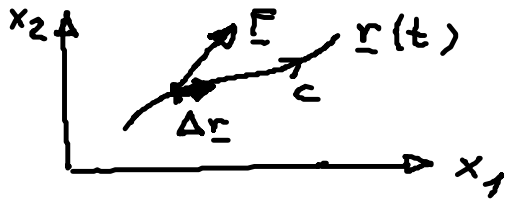
$$\frac{1}{2r} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{r}{r}$$

Arbeit bei Bewegung entlang einer Kurve $\underline{r}(t)$:

$$\Delta W = \underline{F}(\underline{r}) \cdot \Delta \underline{r}$$

$$W = \int_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(\underline{r}) \cdot \underline{v} dt$$

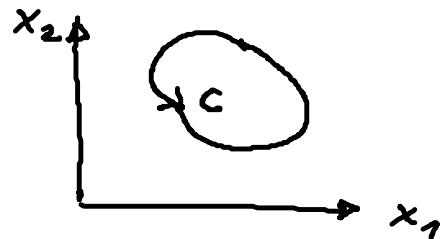
geschw. $\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$



Linienintegral längs einer Kurve C

Arbeit entlang einer geschlossenen Kurve:

$$W = \oint_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$



Konservatives Kraftfeld:

$$W = \int_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = - \int_C \underline{\nabla}\phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = - \int_{t_1}^{t_2} \underline{\nabla}\phi \cdot \underline{\dot{r}} dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi(\underline{r})}{dt} dt = - [\phi(\underline{r}_2) - \phi(\underline{r}_1)]$$

Arbeit wegunabhängig!

Speziell geschlossene Kurve: $W = - \oint_C \underline{\nabla}\phi \cdot d\underline{r} = 0$



$\underline{F}(\underline{r})$ konservativ



\exists Potenzial $\phi(\underline{r})$

5.1.2 Divergenz

geg. Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$

Def.: Divergenz $\operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{A}(\underline{r}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$

$\underline{\nabla}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Rechenregeln

$\operatorname{div} \underline{A} = 0$ falls $\underline{A} = \text{const}$

$\operatorname{div} \underline{r} = 3$

$\operatorname{div} (\phi(\underline{r}) \underline{A}(\underline{r})) = \underline{\nabla} \cdot (\phi(\underline{r}) \underline{A}(\underline{r})) = (\underline{\nabla} \phi(\underline{r})) \cdot \underline{A}(\underline{r}) + \phi(\underline{r}) (\underline{\nabla} \cdot \underline{A}(\underline{r}))$

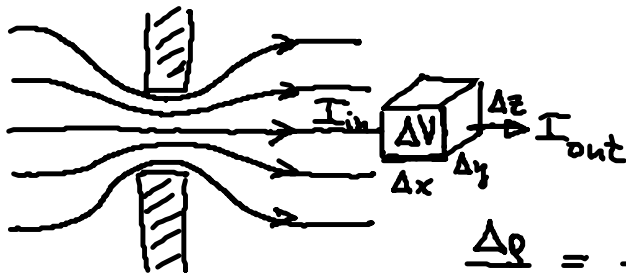
$\operatorname{div} (\underline{\nabla} \phi) = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \phi) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \phi \equiv \Delta \phi$

Laplace-Operator Δ

Interpretation der Divergenz

Strömung einer Flüssigkeit: $\underline{j}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t) \underline{v}(\underline{r}, t)$

Stromdichte Dichte Geschw.



$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta V \Delta t} = \frac{I_{in} - I_{out}}{\Delta y \Delta z \Delta x} = \frac{\text{Nettostrom}}{\text{Fläche} \cdot \Delta x}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \frac{j_x(x, y, z) - j_x(x + \Delta x, y, z)}{\Delta x} + \frac{j_y(x, y, z) - j_y(x, y + \Delta y, z)}{\Delta y} + \frac{j_z(x, y, z) - j_z(x, y, z + \Delta z)}{\Delta z}$$

$\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$: $\boxed{\frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial t} = - \underline{\nabla} \cdot \underline{j}(\underline{r}, t)}$

Kontinuitätsgl., vgl. § 3.4

Stationäre Strömung $\left(\frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial t} = 0\right) \Leftrightarrow \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r}, t) = 0$

$\operatorname{div} \underline{j}(\underline{r}, t) > 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ \underline{j} hat eine Quelle in \underline{r}
(Flüssigkeit strömt heraus)

$\operatorname{div} \underline{j}(\underline{r}, t) < 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ \underline{j} hat eine Senke in \underline{r}
(Flüssigkeit strömt hinein)

lokale Quelledichte

5.1.3 Rotation

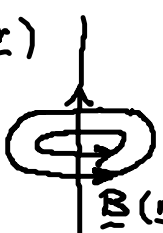
geg. Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$

Def. Rotation $\operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r}) = \operatorname{curl} \underline{A}(\underline{r}) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

$\nabla: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r})$ ist die lokale Wirbelstärke von \underline{A}
(Wirbel = geschlossene Strömungslinien)

Beispiel: Strom durchflussener Leiter

$\underline{j}(\underline{r})$  $\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r}, t)$ (Ampère-Gesetz)
(Magnetostatik)

$\underline{B}(\underline{r})$ magn. Induktion, die durch den Strom erzeugt wird

Rechenregeln

(i) $\nabla \times \nabla \phi(\underline{r}) \equiv 0$ (Kreuzprodukt mit 2 gleichen Vektoren)

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \equiv 0$$

z.B. x-Komp. $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial y} \equiv 0$

Konsequenzen • Mechanik \Rightarrow konservative Kräfte sind wirbelfrei:

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi \Leftrightarrow \text{rot } \underline{F} = 0$$

• Elektrostatik $\Rightarrow \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi$ (el. stat. Pot. ϕ)
 $\Leftrightarrow \text{rot } \underline{E} = 0$

(ii) $\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r})) \equiv 0$ (Spatprodukt mit 2 gleichen Vektoren)

reine Wirbelfelder (darstellbar als $\underline{\nabla} \times \underline{A}$)
haben keine Quellen oder Senken

• Elektrodynamik : $\underline{B}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r})$ mit Vektorpot.
(auch zeitabh.) $\underline{A}(\underline{r})$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{div } \underline{B} = 0}$$

Magnetfelder haben keine Quellen/Senken,
d.h. es gibt keine magnet. Ladungen!