5. Vektoranalysis

5.1 Vektorfelder

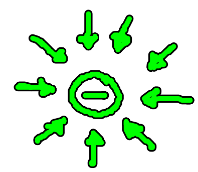
$\underline{A}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ heißt Vektorfeld (oft $d = 2, 3$)
$\quad \underline{r} \mapsto \underline{A}(\underline{r})$

z.B. $\underline{E}(\underline{r})$ el. Feld, $\underline{B}(\underline{r})$ magn. Induktion,
$\underline{v}(\underline{r})$ Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigk.

Spezialfall: skalares Feld: $U: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
$\quad \underline{r} \mapsto U(\underline{r})$

z.B. Dichte $\varrho(\underline{r})$

Darstellung durch Feldlinien, z.B. el. Feld einer Punktladung.



Anwendung:

dyn. System $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$
(§2)

5.1.1 Gradient

geg. skalares Feld $\phi(\underline{r})$, $\quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Richtungsableitung (entlang eines beliebigen Einheitsvektors $\underline{v}$)

$$D_{\underline{v}}\phi := \lim_{t \to 0} \frac{\phi(\underline{r} + t\underline{v}) - \phi(\underline{r})}{t} = \left(\frac{d}{dt} \phi(\underline{r} + t\underline{v}) \right)_{t=0}$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{d}{dt}(x_i + t v_i) \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} v_i$$

Def.: **Gradient** $\underline{\nabla} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{grad} \phi(\underline{r}) \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nabla-Operator}}}{\underline{\nabla}} \phi(\underline{r}) := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einheitsvektor des kartes. Koord.systems}}}{\underline{e}_i}$$

Zus.hang mit Richtungsableitung:

$$D_{\underline{v}} \phi(\underline{r}) = \underline{\nabla} \phi(\underline{r}) \cdot \underline{v}$$

Gradient in krummlinigen Koord. (u, v, w)

$$(\underline{\nabla}\phi)_u = \underline{e}_u \cdot \underline{\nabla}\phi = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|} \underline{\nabla}\phi = \frac{1}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{metr. Koeff. § 4}}}{g_u}} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \underline{\nabla}\phi = \frac{1}{g_u} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow (\underline{\nabla}\phi)_u = \frac{1}{g_u} \frac{\partial \phi}{\partial u}$$

also $\underline{\nabla}\phi = \left(\frac{1}{g_u} \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{1}{g_v} \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{1}{g_w} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)$

Anwendung: konservative Kraft

Newton'sche Gl. $m \ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}(t))$ (Mechanik)

Def.: Eine Kraft heißt konservativ, wenn sie Gradient eines skalaren Potenzials ϕ ist:

$$\boxed{\underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r})}$$

Beispiele: (i) Federkraft $\underline{F} = -k(\underline{r} - \underline{r}_0) \Rightarrow \phi(\underline{r}) = \frac{k}{2}(\underline{r} - \underline{r}_0)^2$

harmon. Pot.

(ii) Gravitationskraft $\underline{F} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$ gravit. konst. γ

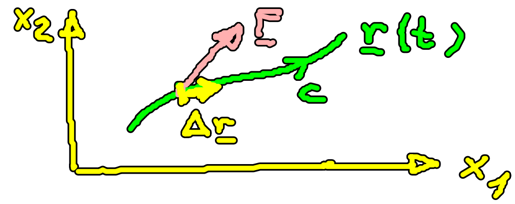
Massen m_1, m_2

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}) = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r} \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |\underline{r}|$$

denn $-\underline{\nabla}\phi(\underline{r}) = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r^2} \underbrace{\underline{\nabla} r}_{\frac{2\underline{r}}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = \frac{\underline{r}}{r}} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$

<u>Arbeit</u> bei Bewegung entlang einer Kurve $\underline{r}(t)$:

$$\Delta W = \underline{F}(\underline{r}) \cdot \Delta \underline{r}$$



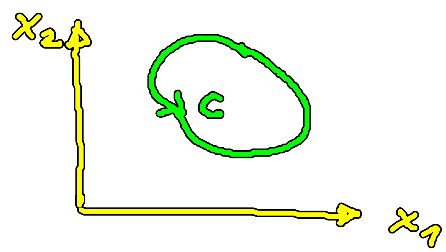
$$\boxed{W = \int_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(\underline{r}) \cdot \underline{v}\, dt$$

Geschw. $\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$

Linienintegral längs einer Kurve C

Arbeit entlang einer geschlossenen Kurve:

$$W = \oint_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$



<u>Konservatives Kraftfeld:</u>

$$W = \int_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = -\int_C \underline{\nabla}\phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = -\int_{t_1}^{t_2} \underline{\nabla}\phi \cdot \dot{\underline{r}}\, dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi(\underline{r})}{\cancel{dt}} \cancel{dt} = -\left[\phi(\underline{r}_2) - \phi(\underline{r}_1)\right]$$

Arbeit wegunabhängig!

Speziell geschlossene Kurve: $W = -\oint_C \underline{\nabla}\phi \cdot d\underline{r} = 0$

$$\Updownarrow$$

$\underline{F}(\underline{r})$ konservativ

$$\Updownarrow$$

$\exists$ Potenzial $\phi(\underline{r})$

5.1.2 Divergenz

geg. Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$

Def.: Divergenz $\quad \operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{A}(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$

$\underline{\nabla} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Rechenregeln

$\operatorname{div} \underline{A} = 0 \quad$ falls $\underline{A} = \text{const}$

$\operatorname{div} \underline{r} = 3$

$\operatorname{div}(\phi(\underline{r})\underline{A}(\underline{r})) = \underline{\nabla} \cdot (\phi(\underline{r})\underline{A}(\underline{r})) = (\underline{\nabla}\phi(\underline{r})) \cdot \underline{A}(\underline{r}) + \phi(\underline{r})(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}(\underline{r}))$

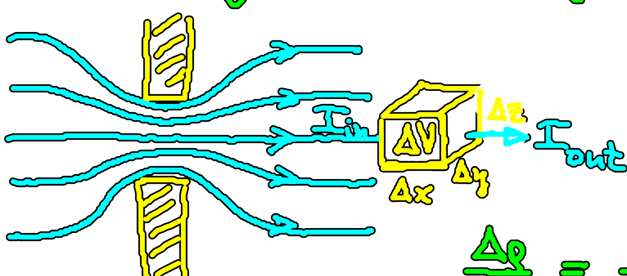
$\operatorname{div}(\underline{\nabla}\phi) = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}\phi) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \phi \equiv \Delta \phi$

Laplace-Operator Δ

Interpretation der Divergenz

Strömung einer Flüssigkeit: $\underline{j}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)\, \underline{v}(\underline{r},t)$

Stromdichte $\quad$ Dichte $\quad$ Geschw.



$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta V\, \Delta t} = \frac{I_{in} - I_{out}}{\Delta y\, \Delta z\, \Delta x} = \frac{\text{Nettostrom}}{\text{Fläche} \cdot \Delta x}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \frac{j_x(x,y,z) - j_x(x+\Delta x,y,z)}{\Delta x} + \frac{j_y(x,y,z) - j_y(x,y+\Delta y,z)}{\Delta y}$$

$$+ \frac{j_z(x,y,z) - j_z(x,y,z+\Delta z)}{\Delta z}$$

$\Delta t \to 0,\ \Delta x \to 0,\ \Delta z \to 0:$ $\boxed{\frac{\partial \rho(\underline{r},t)}{\partial t} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{j}(\underline{r},t)}$

Kontinuitätsgl., vgl. §3.4

Stationäre Strömung $\left(\frac{\partial \rho(\underline{r},t)}{\partial t}=0\right) \Longleftrightarrow \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r},t)=0$

$\operatorname{div} \underline{j}(\underline{r},t) > 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ $\quad$ $\underline{j}$ hat eine Quelle in $\underline{r}$ (Flüssigk. strömt heraus)

$\underbrace{\operatorname{div} \underline{j}(\underline{r},t)}_{\text{lokale Quelldichte}} < 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ $\quad$ $\underline{j}$ hat eine Senke in $\underline{r}$ (Flüssigkeit strömt hinein)

5.1.3 Rotation

geg. Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$

Def. Rotation $\operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r}) = \operatorname{curl} \underline{A}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r}) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

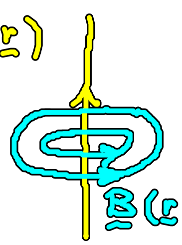
$\underline{\nabla}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r})$ ist die lokale Wirbelstärke von $\underline{A}$

(Wirbel = geschlossene Strömungslinien)

Beispiel: stromdurchflossener Leiter

$\underline{j}(\underline{r})$



$\underline{B}(\underline{r})$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r},t) \quad \text{(Ampère-Gesetz)}$$

(Magnetostatik)

$\underline{B}(\underline{r})$ magn. Induktion, die durch den Strom erzeugt wird

Rechenregeln

(i) $\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \phi(\underline{r}) \equiv 0$ $\quad$ (Kreuzprodukt mit 2 gleichen Vektoren

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} \equiv 0$$

z.B. x-Komp. $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y} \equiv 0$

<u>Konsequenzen</u> • Mechanik $\Longrightarrow$ konservative Kräfte sind wirbelfrei:

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi \iff \mathrm{rot}\,\underline{F} = 0$$

• Elektrostatik $\Longrightarrow$ $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi$ (el. stat. Pot. ϕ)

$$\iff \mathrm{rot}\,\underline{E} = 0$$

(ii) $\underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r})\right) = 0$ (Spatprodukt mit 2 gleichen Vektoren)

reine Wirbelfelder (darstellbar als $\underline{\nabla}\times\underline{A}$) haben keine Quellen oder Senken

• Elektrodynamik (auch zeitabh.) : $\underline{B}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r})$ mit Vektorpot. $\underline{A}(\underline{r})$

$$\iff \boxed{\mathrm{div}\,\underline{B} = 0}$$

Magnetfelder haben keine Quellen / Senken, d.h. es gibt keine magnet. Ladungen!