

5.2 Integralsätze

Motivation:

- konservative Kräfte in der Mechanik

$$\underline{F} = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r}) \Leftrightarrow \underline{\nabla} \times \underline{F} = 0$$

$$\Leftrightarrow W = \oint_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = 0 \quad \text{Arbeit}$$

Zus.hang zwischen Kurvenintegralen und Rotation?

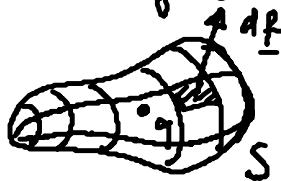
- Elektrostatik:

Coulombfeld einer Punktladung q bei $\underline{r}'=0$:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}}{r^3}$$

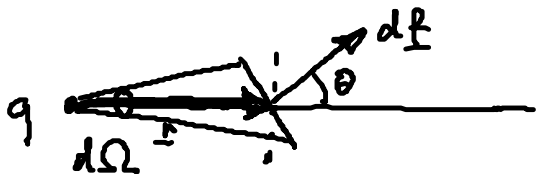
Elektrischer Kraftfluss durch eine geschlossene Oberfläche S um q :

$$\oint_S d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{d\underline{f} \cdot \underline{r}}{r^3}$$



Fluss des Vektorfeldes $\underline{E}(\underline{r})$ durch Fläche S

$d\underline{f}$: orientiertes infinitesimales Flächenelement



$$d\underline{f} \cdot \cos\theta = r^2 d\Omega$$

$$d\underline{f} \cdot \underline{r} = d\underline{f} r \cos\theta = r^3 d\Omega$$

$$\oint \frac{d\underline{f} \cdot \underline{r}}{r^3} = \oint d\Omega = 4\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_S d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Fluss des el. Feldes durch geschlossene Fläche S
= eingeschlossene Ladung

Verallg. auf kontinuierliche Ladungsverteilung ρ :

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} \underline{d\underline{f}} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d\underline{r}' \rho(\underline{r}')$$

Integralform des Coulombgesetzes
(Gauß'sches Gesetz)

Zus.hang zwischen Flussintegral und Divergenz?

5.2.1 Gauß'scher Integralsatz

Physikalische Bedeutung der Divergenz:

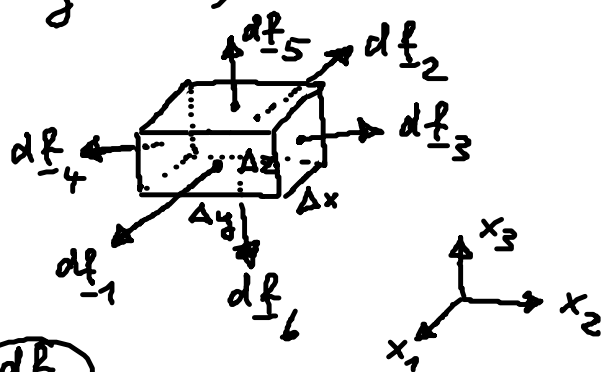
$$\frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial V} \underline{d\underline{f}} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0 \Delta V}$$

mittlere Quelldichte des Feldes \underline{E}
(im Volumen ΔV eingeschlossene Ladung ΔQ)

Es gilt:

$$\operatorname{div} \underline{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial V} \underline{d\underline{f}} \cdot \underline{E}$$

Quelldichte von \underline{E}



Beweis: $\oint_{\partial V} \underline{E} \cdot \underline{d\underline{f}} = \int_{d\underline{f}_1} \underline{E}_1 \cdot \underline{d\underline{f}}_1 - \int_{d\underline{f}_2} \underline{E}_1 \cdot \underline{d\underline{f}}_2 + \int_{d\underline{f}_3} \underline{E}_2 \cdot \underline{d\underline{f}}_3 - \int_{d\underline{f}_4} \underline{E}_2 \cdot \underline{d\underline{f}}_4 + \int_{d\underline{f}_5} \underline{E}_3 \cdot \underline{d\underline{f}}_5 - \int_{d\underline{f}_6} \underline{E}_3 \cdot \underline{d\underline{f}}_6$

$$= \iint dx_2 dx_3 \frac{\partial E_1}{\partial x_1} \Delta x + \iint dx_1 dx_3 \frac{\partial E_2}{\partial x_2} \Delta y + \iint dx_1 dx_2 \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \Delta z + O(\Delta x^2) \text{ etc.}$$

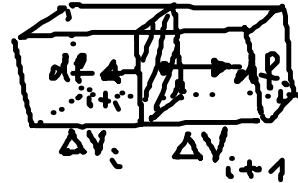
Mittelwertsatz der Integralrechnung und $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}$$

□

Zerlegung eines beliebigen, einfach zusammenhängenden Gebietes V in Quader mit $\Delta V_i \rightarrow 0$:

$$\oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E} = \sum_i \oint_{\partial V_i} d\underline{f} \cdot \underline{E}$$



$$= \sum_i \Delta V_i \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}_i)$$

Riemann-Summe

$$\rightarrow \int_V d^3r \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r})$$

Beiträge zu $\oint d\underline{f} \cdot \underline{E}$ an Innenflächen heben sich heraus!

Vor.: \underline{E} stetig diff. bar

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E} = \int_V d^3r \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r})$$

Gauß'scher Integralsatz

$$\Rightarrow \epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E} = \epsilon_0 \int_V d^3r \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}) \stackrel{!}{=} \int_V d^3r \rho(\underline{r})$$

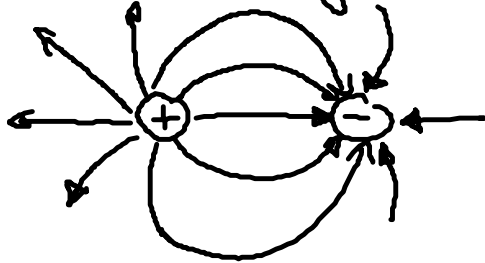
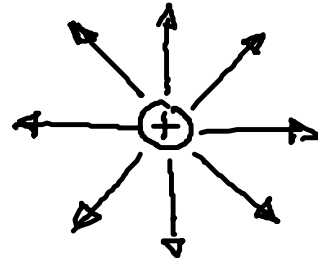
für beliebige Volumina V

$$\Rightarrow \epsilon_0 \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})$$

differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes

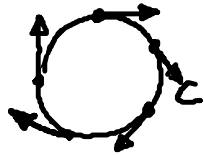
Die elektrischen Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes:

Feldlinien beginnen in positiven Ladungen und enden in neg. Ladungen



5.2.2 Stokes'cher Integralsatz

Wirbel des elektrischen Feldes:



Physikalische Interpretation der Rotation:

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{n} = \underline{\text{Zirkulation}} \text{ von } \underline{E} \text{ längs } C$$

Linienintegral längs des geschlossenen Weges C

Es gilt

$$\underline{n} \cdot \text{rot } \underline{E} = \lim_{F_C \rightarrow 0} \frac{1}{F_C} \oint_C \underline{E} \cdot d\underline{n}$$

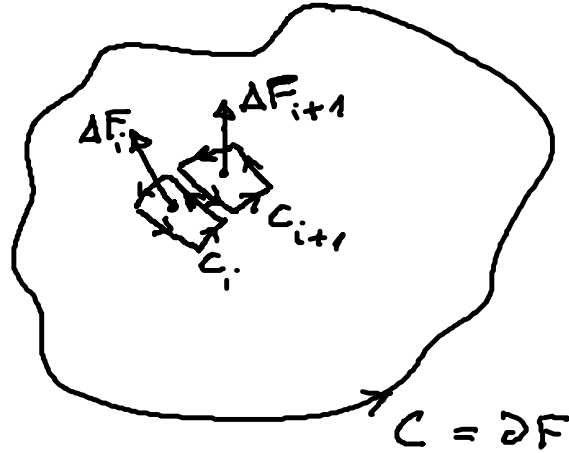


Rotation = Wirbelstärke = Flächendichte der Zirkulation

Stokes'scher Integralsatz

Zerlegung einer beliebigen Fläche F in Teilflächen mit $\Delta F_i \rightarrow 0$

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{r} = \sum_i \oint_{C_i} \underline{E}_i \cdot d\underline{r}$$
$$= \sum_i \Delta F_i \underline{n}_i \cdot \text{rot } \underline{E}(\underline{r}_i)$$



Riemann-Summe

$$\rightarrow \int_F d\underline{f} \cdot \text{rot } \underline{E}(\underline{r})$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{r} = \int_F d\underline{f} \cdot \text{rot } \underline{E}(\underline{r})$$

Linienintegrale im Inneren heben sich heraus!

Stokes'scher Integralsatz

5.2.3 Poisson-Gleichung und Green'sche Funktion

$\underline{E} = -\underline{\nabla} \phi$ eingesetzt in $\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$:

$$\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})$$

Poisson-Gl.

ellipt. part. Dgl.

$$\left(ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 > 0 \text{ in } au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} \right)$$

part. Dgl. zur Berechnung des el. Potentials für eine vorgegebene Ladungsverteilung.

Wird erst eindeutig durch Randbedingungen:

(i) $\phi(\underline{r}) \rightarrow 0$ hinreichend rasch für $|\underline{r}| \rightarrow \infty$
oder

(ii) $\phi(\underline{r})$ sei gegeben auf Flächen im Endlichen
(Leiteroberflächen)

Green'sche Funktion

Allgemeine Methode zur Lösung inhomogener
(partieller oder gewöhnlicher) Dgl. für
vorgegebene Inhomogenität ,

Beispiele : gedämpfter getriebener harmon. Osz. (Mechanik)
Poisson-gf. } ϵ -Dynamik
Wellengl. (retardierte Pot.)
Streuung (Quantenmechanik)

Strategie

(i) Zuerst Lösung der Dgl. für δ -förmige Inhomogenität

$$\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

d.h. Green'sche Funktion $G(\underline{r}-\underline{r}')$ ist Lösung des Pot.
für Punktladung bei \underline{r}' .

Für die speziellen Randbed. $\phi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ ist

$$\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}} \quad \text{Coulomb-Pot.}$$

(ii) Dann Lösung für beliebige Inhomogenität $\rho(\underline{r})$
durch Faltung mit der Green'schen Funktion:

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \int d^3r' G(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}')$$

Warum Faltung?

Abstraktes Lösungsschema:

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Diff. op. Δ

Lösung durch

\implies

Invertierung
des Diff.-op.

$$\phi = \tilde{G} \rho$$

Green'scher Op. \tilde{G}

$$\phi(x) = \int d^3r' G(x-r') \rho(r')$$

Integralop. (Faltung)

Faltungssatz § 3.3.2

Fourier-Rücktrafo

Fourier-Trafo

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \hat{\phi}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

\Downarrow

$$-k^2 \hat{\phi} = -\frac{1}{\epsilon_0} \hat{\rho}$$

Invertierung
 \implies
des Mult.op.

$$\hat{\phi} = \hat{G} \hat{\rho}$$

$$\hat{G} := \frac{1}{\epsilon_0 k^2}$$

Multiplikationssatz
(§ 3.3.2)