2. Vektor- und Tensorrechnung

- Motivation:
  Grundlagen der Vektor-/Tensorrechnung wiederholen, wichtig für Kontinuumstheorie

2.1 Grundlagen des Euklidischen Raumes

a) physikalischer Anschauungsraum

- im folgenden:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Physikalischer Anschauungsraum } A \\ \quad = \text{euklidischer Raum} = \text{flacher Raum}\end{array}} \qquad (2.1)$$

$\longrightarrow$ euklidische Geometrie gilt:

Bsp: (i) Winkelsumme im Dreieck $= 180°$

Gegenbeispiel:

Winkelsumme von 270°

(ii) Satz von Pythagoras: $a^2+b^2=c^2$

(iii) Parallelenaxiom:

- Unterscheide:
  (i) physikal. Anschauungsraum A mit Punkten
  (ii) Vektorraum V_p („Tangentialraum“), angeheftet an jeden P, in dem die physikal. Vektoren wirken

  – gekrümmter Raum: Bsp:

V_p

  – flacher Raum: Pkte in A definieren Vektoren
  $\longrightarrow$ Unterscheidung „künstlich“!

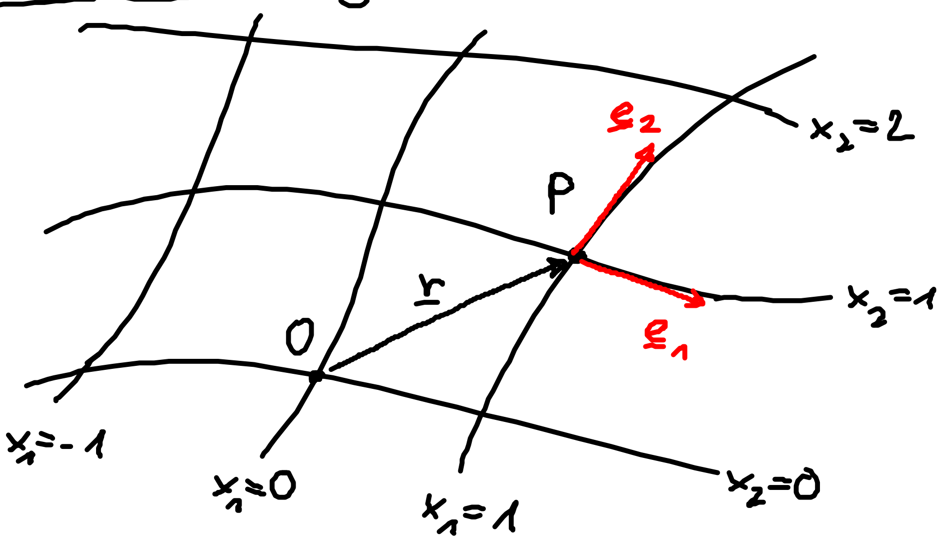
→ Folien: affiner Raum
euklidischer Raum

b) Koordinatensysteme

• Motivation: Koordinaten von Pktn. P, für Beschreibung von Skalar-, Vektor-, Tensorfelder

• Ort von Pkt. P $\longleftrightarrow$ Koordinatentripel: (x_1, x_2, x_3)

(i) allgemeine (krummlinige) Koordinaten:



Netz von beliebigen Koord. Linien

Ort von P: (x_1, x_2, x_3) mit Ortsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ $[\in V]$

• natürliche (Koordinaten) Basis für V_p angeheftet an P:

normierten Tangentialvektoren $\underline{e}_i$ an x_i-Linien (x_j = konst., $j \neq i$)

also: $$\boxed{\underline{e}_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}} \quad (2.5)$$

mit $|\underline{e}_i| = 1$, i.a. $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \neq 0$ und $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ nicht ortsfest

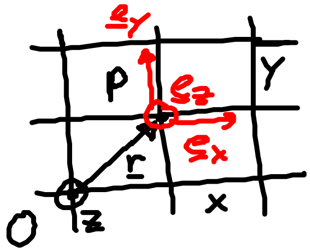
$$\longrightarrow \boxed{\Gamma^i_{kl} = \underline{e}_i \cdot \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial x_l}} \quad (2.6)$$

… „Konnexionskoeffizienten"

NB. (1) i.f. $\boxed{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}}$ (2.7), also Orthonormalbasis (ONB)

(2) in ART: $\underline{e}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}$

(ii) Kartesische Koordinaten:



$P: (x, y, z)$

(2.8)

- $\left.\begin{array}{l}\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\} \text{ ortsfest} \\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} \quad i,j = x,y,z\end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l}\underline{r} = \sum_i x_i \underline{e}_i = x_i \underline{e}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\ T^i_{kl} = 0\,!\end{array}$

(iii) Zylinderkoordinaten: s. Folie

(iv) Kugelkoordinaten: s. Übungen

2.2 Tensoren 2. Stufe

a) Einordnung:

Tensoren 0. Stufe = Skalare

" 1. Stufe = Vektoren $\quad \underline{a} \in V_p$

$$\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i = a_i \underline{e}_i \quad \text{mit } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \ldots \text{ ONB in } V_p$$

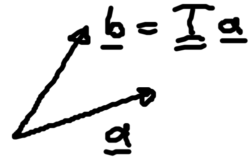
Schreibweise:

$$\underline{a} \begin{cases} \text{Vektor} \\ \text{Matrixdarstellung}: \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

jetzt Tensor 2. Stufe!

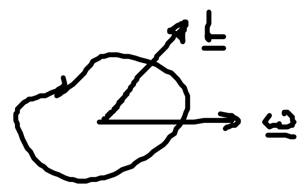
b) <u>Definitionen & dyadisches Produkt</u>:

<u>Def</u>: $\boxed{\begin{array}{l} \text{Tensoren 2. Stufe vermitteln eine lineare Abbildung} \\ \text{von } V_p \text{ in sich:} \\ \underline{\underline{T}}:\ V_p \longrightarrow V_p \\ \underline{\underline{T}}:\ \underline{a} \longrightarrow \underline{b} := \underline{\underline{T}}\,\underline{a}\,, \quad \underline{a}, \underline{b} \in V_p \\ \text{Linearität: } \underline{\underline{T}}(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\,\underline{\underline{T}}\,\underline{a} + q\,\underline{\underline{T}}\,\underline{b}\,, \quad p, q \in \mathbb{R} \end{array}}$ (2.15)



· Bsp 1: starrer Körper: $\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$

Drehimpuls — Trägheitstensor — Winkelgeschw.



Bsp. 2: Spannungstensor: charakterisiert Material ($\longrightarrow$ s. Kapitel 3)
(lat. tendo; spannen)

• Komponente von $\underline{\underline{T}}$ bzgl. Basis in V_p: $\longrightarrow$ Rechnen

Voraussetzung: Koordinatenbasis = ONB: $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ $\quad i,j = 1,2,3$

$$\underline{e}_i \cdot \big|\, \underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a} \longrightarrow b_i = \underline{e}_i \cdot \underline{b} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$$

$$\xrightarrow[\text{Linearität}]{\underline{a} = a_j \underline{e}_j} b_i = (\underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j)\, a_j$$

$$\longrightarrow \boxed{T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j} \quad (2.16)$$

... Komponenten von $\underline{\underline{T}}$

$$\longrightarrow \boxed{b_i = T_{ij}\, a_j} \quad (2.17)$$

Schreibweise:

$$\underline{\underline{T}} \begin{cases} \text{Tensor 2. Stufe} \\ \text{Matrixdarstellung: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{31} & \dots & T_{33} \end{pmatrix} \end{cases}$$

also:

$$\underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a} \begin{cases} \text{lineare Abbildung: darstellungsfrei} \\ \text{" \quad " \quad in Matrixschreibweise} \end{cases}$$

• **Def:** Das Tensor-/dyadische Produkt von $\underline{a}, \underline{b} \in V_p$:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in V_p \times V_p \quad \text{(Produktraum)}$$

besitzt die Eigenschaften: (2.18)

1. Bilinearität: $\underline{a} \otimes \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \otimes (b_j \underline{e}_j)$
$= a_i b_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$

2. lineare Abbildung:

$$(\underline{a} \otimes \underline{b})\,\underline{c} = \underline{a}\,(\underline{b} \cdot \underline{c}) \in V_p$$

• (2.18) legt nahe:

Satz: Tensoren 2. Stufe sind Elemente des Produktraumes $V \times V$, der durch die Basistensoren $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j,\ i,j = 1,2,3\}$ aufgespannt wird: (2.19)

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

... Entwicklung von $\underline{\underline{T}}$ nach Basis!
(vgl. $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$)

Beweis: (2.16) $T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j \overset{(2.19)}{=} \underline{e}_i \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j$

$$= T_{kl} \underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k}_{\delta_{ik}} \underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j}_{\delta_{lj}} = T_{ij} \quad ✓$$

NB: $\boxed{(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = a_i\, b_j}$ (2.20)

Bew: $\underline{e}_i \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b})\, \underline{e}_j = \underline{e}_i \cdot \underline{a}\ \ \underline{b} \cdot \underline{e}_j = a_i b_j$

c) Spezielle Tensoren:

- transponierte Tensoren: $\underline{\underline{T}}^t$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a}\cdot\underline{\underline{T}}\,\underline{b} &= \underline{b}\cdot\underline{\underline{T}}^t\underline{a} \\ &= (\underline{\underline{T}}^t\underline{a})\cdot\underline{b} \end{aligned}} \quad (2.21)$$

$$\xrightarrow[\underline{b}=\underline{e}_i]{\underline{a}=\underline{e}_j} \quad \boxed{T_{ji} = (\underline{\underline{T}}^t)_{ij}}$$

- allg. Tensor 2. Stufe (in 3 Dim.): $3\times 3 = 9$ unabh. Komp.

  symmetrischer Tensoren: $$\boxed{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}} \xrightarrow{(2.21)} T_{ji} = T_{ij}} \quad (2.22)$$

  ... 6 unab. Komp. T_{11}, T_{22}, T_{33}
  T_{12}, T_{13}, T_{23}

  Bsp: Spannungstensor

  antisymmetr. Tensor: $$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}} \xrightarrow{(2.21)} T_{ji} = -T_{ij} \\ &\longrightarrow T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0 \end{aligned}} \quad (2.23)$$

  ... 3 unabh. Komp: T_{12}, T_{13}, T_{23}