# 3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeiten

## 3.1 Kinematik

a) materielle und räumliche Koordinaten

$$\underset{\underset{\textstyle \xi}{\uparrow}}{\text{materielle}} \qquad\qquad \underset{\underset{\textstyle \underline{x} = \underline{x}(\xi, t)}{\uparrow}}{\text{räumliche}}$$

b) Konvektionsformel

• beliebiges Feld: $\varphi(\underline{x},t) = \varphi(\underline{x}(\xi,t),t) = \varphi(\xi,t)$ (3.1)

… „physikal. Konvention“ für Funktionen

• Zeitableitungen:

(i) $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{x},t)$ … lokale Zeitableitung (≙ zeitl. Änderung am Ort $\underline{x}$)

(ii) $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\xi,t) \equiv \frac{d}{dt}\varphi(\underline{x},t)}$$ (3.2) … materielle oder substantielle Zeitableitung (≙ zeitl. Änderung im Punkt P, im bewegten Flüssigkeitsvolumen!)

$$= \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{x},t) + [\nabla_i \varphi(\underline{x},t)] \underbrace{\frac{\partial x_i(\xi,t)}{\partial t}}_{v_i(\underline{x},t)}$$

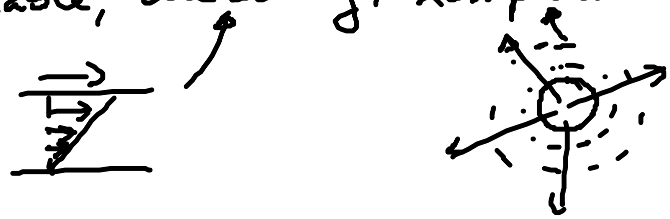
$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{} = \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}_{\substack{\text{lokale} \\ \text{Zeitabl.}}} + \underbrace{\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\varphi}_{\substack{\text{Konvektionsterm} \\ \text{„ ableitung}}}} \quad (3.3)$$

… Konvektionsformel

Bsp: $\frac{d\varphi}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \underbrace{\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \varphi}_{\text{lokale zeitl. Änderung aufgrund Strömung}}$

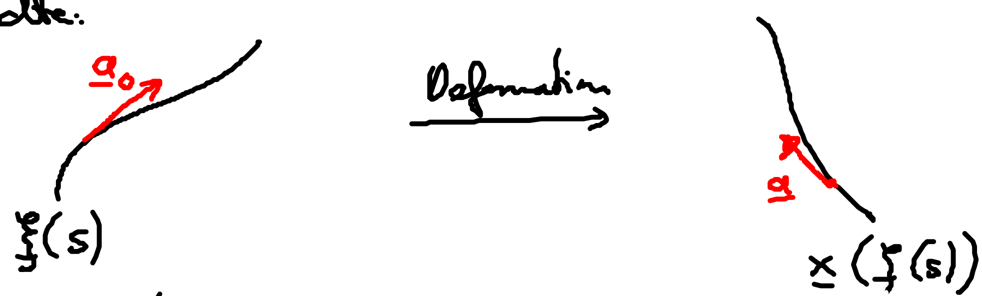
c) Deformationsrate

• Ziel: Variable, die Scherung / Dilatation Kompression von Flüssigkeit erfasst



(i) Geschwindigkeitsgradient:

• Betrachte:




Tangentialvektor:

$$\underline{a}_0 = \frac{\partial}{\partial s} \underline{\xi}(s) \longrightarrow \underline{a} = \frac{\partial}{\partial s} \underline{x}(\underline{\xi}(s)) \quad \text{mit } a_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \underbrace{\frac{\partial \xi_j}{\partial s}}_{a_{0j}} \quad (3.4)$$

• Führe ein: $\boxed{\underline{\underline{F}} \quad \text{mit } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}}$ (3.5)

... Jacobische Matrix

also: (3.4) $\boxed{\underline{a} = \underline{\underline{F}}\, \underline{a}_0}$ (3.6)

• Betrachte:

$$\frac{d}{dt} \underline{a} \overset{(3.6)}{=} \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t} \underline{a}_0$$

$$= \underbrace{\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t} \underline{\underline{F}}^{-1}}_{\underline{\underline{L}}} \underline{a} \quad \text{mit } (\underline{\underline{F}}^{-1})_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \quad (\text{o.B})$$

in Komponenten:

$$L_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right)\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}x_i\right)}_{v_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nabla_j v_i$$

also:
$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\underline{a} = \underline{\underline{L}}\,\underline{a}\\ &\text{mit } L_{ij} = \nabla_j v_i\end{aligned}}$$
... Geschwindigkeitsgradient

• Zerlegung:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\underline{L}} &= \tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^t\right) + \tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^t\right)\\ &= \quad \underline{\underline{A}} \quad + \quad \underline{\underline{W}}\end{aligned}} \qquad (3.8)$$

$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j\right)$ ... Deformationsrate = Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j\right)$ ... Drehgeschwindigkeitstensor

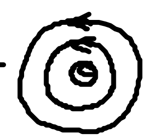
(ii) <u>Bedeutung von $\underline{\underline{W}}$</u>

• $\underline{\underline{W}}$ ist antisymmetrisch: $\underline{\underline{W}} = \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{pmatrix}$

• Führe ein:

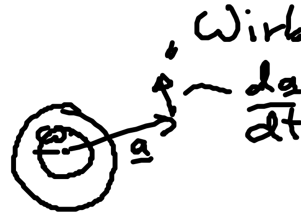
$$\boxed{\begin{aligned}&\underline{\omega} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{v}\\ \text{mit } &\omega_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\nabla_j v_k = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{jk}\end{aligned}} \qquad (3.9)$$

... Drehvektor
Vortex in Flüssigkeit

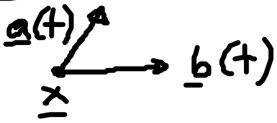


„Wirbel"

denn es gilt:
$$\boxed{\underline{\underline{W}}\,\underline{a} = \underline{\omega} \times \underline{a}} \qquad (3.10)$$
... Drehung von $\underline{a}$



## (iii) Deformationsrate

• Betrachte: 


• zeitliche Änderung von $\underline{a}\cdot\underline{b}$ ?

$$\frac{d}{dt}(\underline{a}\cdot\underline{b}) = \dot{\underline{a}}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\dot{\underline{b}} \overset{(3.7)}{=} \underline{\underline{L}}\,\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{\underline{L}}\,\underline{b}$$

$$\underline{\underline{L}}^t$$

$$= \underline{a}\cdot(\underline{\underline{L}}+\underline{\underline{L}}^t)\,\underline{b}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\underline{a}\cdot\underline{b}) \overset{(3.8)}{=} 2\,\underline{a}\cdot\underline{\underline{A}}\,\underline{b}} \qquad (3.11)$$

• Interpretation von $\underline{\underline{A}}$: mit $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ ... Koordinatenbasis

$$\underline{\underline{A}} = A_{ij}\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j$$

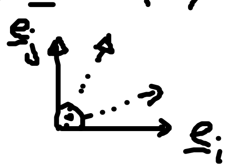
$$\underline{e}_k\cdot\underline{\underline{A}}\,\underline{e}_k = A_{ij}\,\underbrace{\underline{e}_k\cdot\underline{e}_i}_{\delta_{ik}}\,\underbrace{\underline{e}_j\cdot\underline{e}_k}_{\delta_{jk}} = A_{kk}$$

(1) $\underline{a}=\underline{b}=a\,\underline{e}_i \xrightarrow{(3.11)} 2a\dot{a} = 2a^2 A_{ii}$

$$\rightarrow \boxed{A_{ii} = \frac{\dot{a}}{a}}$$

... relative Dehngeschwindigkeit von Längen entlang $\underline{e}_i$

(2) $\underline{a}=\underline{e}_i$, $\underline{b}=\underline{e}_j$ $\longrightarrow$ $\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\underbrace{|\underline{e}_i|}_{=1}\underbrace{|\underline{e}_j|}_{=1}\cos\Theta\right)}_{-\sin\Theta\,\dot{\Theta}|_{\Theta=\frac{\pi}{2}}}\Bigg|_{\Theta=\frac{\pi}{2}} = 2A_{ij}$



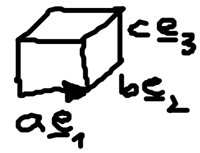

$$\rightarrow \boxed{A_{ij} = -\frac{1}{2}\dot{\Theta}} \qquad (3.13)$$
$$i\neq j$$

... halbe Änderungsgeschwindigkeit rechter Winkel

$= \underline{\text{Scherrate}}$

(3) Kompressionsrate:

Quadervolumen: $V = abc$




Betrachte: $\dfrac{\dot V}{V} = \dfrac{(abc)^{\cdot}}{abc} = \dfrac{\dot a}{a} + \dfrac{\dot b}{b} + \dfrac{\dot c}{c} = \overbrace{A_{11} + A_{22} + A_{33}}^{\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}} = \nabla_1 v_1 + \nabla_2 v_2 + \nabla_3 v_3$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\dot V}{V} = \mathrm{div}\, \underline{v} = \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}}} \quad (3.14)$$

## 3.2 Einordnung: hydrodynamische Variable

- Ges.: Bewegungsgleichung für Kontinua, insbes. zähe Flüssigkeit
- jedes System: aufgebaut durch Atome: Kollisionen mit mittlerer stoßfreier Zeit $\tau_c$

  $\longrightarrow$ lokales therm. GG $\hat{=}$ Thermodynamik lokal anwendbar
- hier: Dynamik von Kontinua auf Längenskala $\gg$ Atomabstände

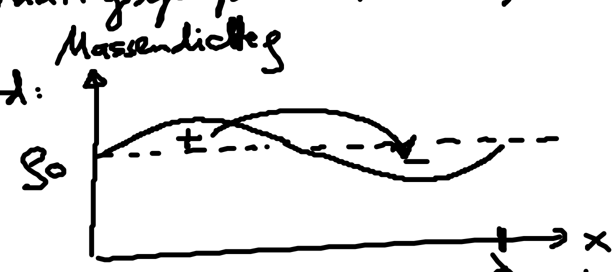
  " " " " Zeiten $\tau_H \gg \tau_c$

also: langsame kollektive Dynamik

$\longrightarrow$ hydrodynamische Variable:

(1) Erhaltungsgrößen: Masse, Impuls, Energie

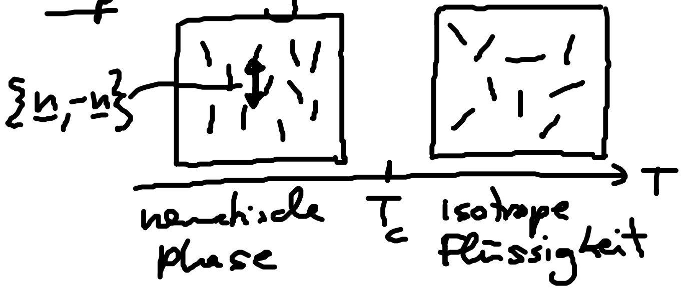
Grd:




$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ausgleich der Inhomogenitäten auf Zeiten} \\ \tau \longrightarrow \infty \text{ für } \lambda \longrightarrow \infty\end{array}}$$

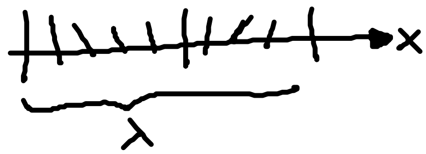
(2) Variable, die gebrochene kontinuierliche Symmetrien beschreiben $=$ Goldstone-Variablen

Bsp: Flüssigkristalle




$\underline{n}$ ... Direktor

elastische Deformationen




$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Relaxationszeit } \tau \longrightarrow \infty \\ \xi = \lambda \longrightarrow \infty\end{array}}$$

Grund: Rotation gesamten Systems