

3.6 Energiebilanz = 1. Hauptsatz der Thermodynamik

• Gesamtenergie:
$$E = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t) d^3x$$

$$= \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \left[\frac{1}{2} v^2(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t) \right] d^3x$$

e ... spezifische Gesamtenergie / G. Energie pro Masseneinheit
 u ... " innere Energie / innere Energie " "

• 1. Hauptsatz: [vgl: $dU = dQ + dW_{\text{mech}}$!]

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) d^3x \tag{3.32}$$

$$= - \int_V \underbrace{\rho e \mathbf{v}}_{\substack{\text{Energiestromdichte} \\ \text{(konvektiver Anteil)}}} \cdot d\mathbf{f} - \int_V \underbrace{\mathbf{q}}_{\substack{\text{Wärmestromdichte} \\ \mathbf{q} \dots \text{Wärmeerzeugung} \\ \text{pro Masseneinheit}}} \cdot d\mathbf{f} + \int_V \underbrace{\rho \mathbf{r}_w}_{\substack{\text{zugeführte Wärme pro} \\ \text{Zeiteinheit}}} d^3x + \underbrace{\int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d^3x + \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} d\mathbf{f}}_{\substack{\text{mechan. Leistung} \\ \text{von Volumen- und} \\ \text{Oberflächenkräften}}}$$

• Umformung:

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} d\mathbf{f} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V \text{div} (\mathbf{T}^T \mathbf{v}) d^3x$$

(3.32) → kanonische Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \right] + \text{div} \left[\underbrace{\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \mathbf{v}}_{\text{konvektiv}} - \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{v}}_{\text{innere Kräfte}} + \underbrace{\mathbf{q}}_{\text{Wärmestrom}} \right] = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} + r_w) \tag{3.33}$$

Energiestromdichte

NB: Kontinuitätsgl. für ρe und Quellterme

• Umformung:

$$(i) \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \text{div}(\rho e \underline{v}) \stackrel{(3.17)}{=} \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla e \right) = \rho \frac{de}{dt}$$

$e = \frac{v^2}{2} + u$
 ϕ in (3.17) $\rho \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} + \rho \frac{du}{dt}$

$$(ii) \text{div}(\underline{I}^t \underline{v}) = \nabla_i (T_{ji} v_j) = \underline{v} \cdot \text{div} \underline{I} + \underbrace{T_{ji} \nabla_i v_j}_{\substack{\text{mit (3.7)} \\ T_{ij}^t L_{ji} = \text{Sp} \underline{I}^t \underline{L}}} + \rho \underline{v} \cdot \underline{b}$$

[v · (3.22)]

(3.33) → grüne Terme streichen

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla u \right) = \underbrace{\text{Sp}(\underline{I}^t \underline{L})}_{\substack{\text{mechan.} \\ \text{Leistung} \\ \text{der inneren Kräfte}}} - \underbrace{\text{div} \underline{q}}_{\substack{\text{Wärme-} \\ \text{fluß}}} + \underbrace{\rho r_w}_{\substack{\text{Wärme-} \\ \text{quelle}}} \quad (3.34)$$

3.7 2. Hauptsatz der Thermodynamik

• hilft bei Aussagen über Materialgesetze für $\underline{I}, \underline{q}$

• homogenes System: $dS \stackrel{\substack{\text{irreversibel} \\ \uparrow \\ \text{reversible Prozesse}}}{\geq} \frac{dQ}{T}$

• Kontinua: $S = \int \rho s d^3x$
 s... spezifische Entropie / Entropie pro Masseneinheit

2. HS:

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) d^3x \geq - \underbrace{\int_V \left(\rho s v + \frac{q}{T} \right) \cdot df}_{\text{Entropiestromdichte}} + \int_V \frac{\rho r_w}{T} d^3x \quad (3.35)$$

$$\rightarrow \mathcal{G} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \text{div} \left(\rho s v + \frac{q}{T} \right) - \frac{\rho r_w}{T} \geq 0$$

bzw mit (3.17)

$$T\mathcal{G} = T\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} q - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T - \rho r_w \geq 0 \quad (3.36)$$

... Clausius - Duhem - Gl.

Bedeutung: (i) reversible Prozesse: $\mathcal{G} = 0$
 (ii) irreversible " : $\mathcal{G} > 0$

\mathcal{G} ... Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit für dissipative Vorgänge im System

Umschreibung:

(i) Kontrollgröße $T \rightarrow$ führe ein: $f = u - Ts$ (3.37)
 ... spezifische freie Energie

(ii) erweitere Erhaltungssätze
 mit 1. HS (3.34): $[\rho r_w - \text{div} q = \rho \frac{du}{dt} - \rho p \underline{\underline{I}} \underline{\underline{L}}]$ in (3.36)

$$T\mathcal{G} = -\rho \left(\frac{du}{dt} - T \frac{ds}{dt} \right) + \rho p (\underline{\underline{I}} \underline{\underline{L}}) - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0$$

$$\rightarrow T\mathcal{G} = -\rho \left(\frac{df}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) + \rho p (\underline{\underline{I}} \underline{\underline{L}}) - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0 \quad (3.38)$$

mit $\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} - s \frac{dT}{dt} - T \frac{ds}{dt}$

3.8 Die Newtonsche Flüssigkeit

a) erste Aussagen für isotope Flüssigkeiten:

• Annahme: $f = f(T, \varrho)$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Druck: } p = \varrho^2 \frac{\partial f}{\partial \varrho} \\ \text{spez. Entropie: } s = - \frac{\partial f}{\partial T} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Beweis: Übung

• Umformung von (3.38): $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$

$$T\dot{G} = -\varrho(\dot{f} + s\dot{T}) + \text{Sp}(\underline{I}^t \underline{L}) - \frac{1}{T} \varrho \cdot \nabla T \geq 0 \quad (3.38)$$

mit (i) $\underline{I}^t = \underline{I}$: $\text{Sp} \underline{I}^t \underline{L} \rightarrow \text{Sp} \underline{I} \underline{A}$

$$[\text{Es war: } L_{ij} = \nabla_j v_i, A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)]$$

(ii) Zerlegung: $\underline{I} = \underline{I}^0 + \underline{I}' \quad (3.40)$

statischer Anteil: $\underline{I}^0 = -p \underline{1} \quad (3.41)$

$$\rightarrow \underline{I} d\mathfrak{f} = -p d\mathfrak{f}$$

Grund: keine Scherspannungen $\perp d\mathfrak{f}$

$$\rightarrow \underline{I} \sim \underline{1}, p \dots \text{Druck (s.u.)}$$

dissipativer Anteil \underline{I}' (s.u.)

$$\begin{aligned} \text{damit } \text{Sp} \underline{I} \underline{A} &= \text{Sp}[(-p \underline{1} + \underline{I}') \underline{A}] \\ &= -p \underbrace{\text{Sp} \underline{A}}_{-p \text{ div } \underline{v}} + \text{Sp}(\underline{I}' \underline{A}) \end{aligned}$$

$$[\dot{\varrho} + \varrho \text{ div } \underline{v} = 0] = \frac{p}{\varrho} \dot{\varrho} + \text{Sp}(\underline{I}' \underline{A})$$

(iii) $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial f}{\partial \varrho} \dot{\varrho}$

$$\text{(i) - (iii)} \rightarrow \text{in (3.38)} \rightarrow TG = -\underbrace{\rho \left(\frac{\partial f}{\partial T} + s \right) \dot{T}}_{(*)} - \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho} \right) \dot{\rho} + \rho_p \underline{I}' A - \frac{1}{T} q \cdot \underline{\nabla} T \geq 0 \quad (3.42)$$

Argumentation: $\dot{T}, \dot{\rho}$ frei präparierbar

- (1) = 0 $\hat{=}$ Gl. (3.39)
- (2) = 0 $\xrightarrow{(3.39)}$ p in I^0 ist Druck!

→ Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit:

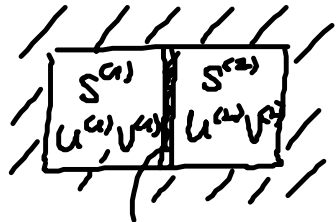
$$TG = \underbrace{\rho_p \underline{I}' A}_{\text{Dissipation bei mechan. Arbeit}} - \underbrace{\frac{1}{T} q \cdot \underline{\nabla} T}_{\text{Dissipation durch Wärmefluss}} \geq 0$$

Dissipation bei mechan. Arbeit
Dissipation durch Wärmefluss

• Deutung:

$$(3.43) \rightarrow G = \rho_p \underline{I}' A + q \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{T} \geq 0$$

(i) Vgl. mit Thermodynamik



Wand

Gesamtentropie: $S = S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}) + S^{(2)}(U^{(2)}, V^{(2)})$

Wärme durchlässig, bewegliche Wand

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \underbrace{\left(\frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}} \right)}_{\text{Temp. gradient}} \underbrace{\frac{\Delta U^{(1)}}{\Delta t}}_{\hat{=} q} + \underbrace{\left(\frac{p^{(1)}}{T^{(1)}} - \frac{p^{(2)}}{T^{(2)}} \right)}_{\hat{=} \frac{I'}{T}} \underbrace{\frac{\Delta V^{(1)}}{\Delta t}}_{\hat{=} A} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Delta U^{(1)} + \Delta U^{(2)} &= 0 \\ \Delta V^{(1)} + \Delta V^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$