3.10. Die Navier-Stokes-Gleichungen

- NS-Gleichungen:

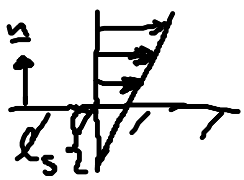
$$\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla} p + \eta\, \underline{\nabla}^2 \underline{v} + (\eta + \eta')\,\underline{\nabla}(\mathrm{div}\,\underline{v}) + \rho\, \underline{b} \qquad (3.62)$$

- ...
- ideale Flüssigkeit: $\eta, \eta' = 0 \longrightarrow$ Eulergleichungen
  Anwendg.: Dynamik von Gasen
- Flüssigkeit: $\mathrm{div}\,\underline{v} \approx 0$ (in guter Näherung inkompressibel)
- Randbedingungen:
  (i) haftend:

$$\boxed{\underline{v}\big|_{Rand} = 0} \qquad (3.63)$$

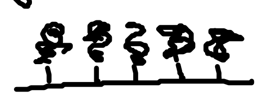
„glatte", „homogene" Oberflächen

(ii) mit „Slip"-Länge l_s: (3.64)

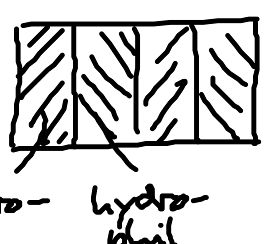


$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Normalgeschw.: } \underline{v}_n = 0 \\ \text{Tangentialgeschw.: } (\underline{v}_t - l_s\, \underline{n}\cdot\underline{\nabla}\, \underline{v}_t)\big|_{Rand} = 0 \end{array}}$$

Realisierung: strukturierte Oberflächen (auf Nanometer-Skala)

- mit Polymeren beschichten 
- Nadeln " 

  Bsp. Folie
- chemisch strukturiert → Muster

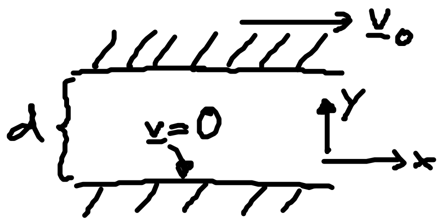


- Rauhigkeit

$\longrightarrow l_s = \ldots 100\,\mathrm{nm} \ldots 50\,\mu\mathrm{m}$

wichtig für: Mikro-/Nanofluidik
Biologie
poröse Medien

• einfache Schergeometrie: <u>Couette Strömung</u> = Strömungen, erzeugt durch bewegte Berandung



$\underline{b}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}=0$

Annahme: $\underline{v} = v(y)\,\underline{e}_x$

$$\longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t}=0, \quad \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}=0, \quad \& \ \mathrm{div}\,\underline{v}=0 \xrightarrow{(3.62)} \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v}=0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}v(y)=0 \longrightarrow \boxed{v(y) = v_0\,\frac{y}{d}} \quad (3.65)$$

Spannungstensor: $\underline{\underline{T}} = 2\eta\,\underline{\underline{A}}$

$\longrightarrow$ Kraft pro Flächeneinheit: $$\boxed{T_{xy} = \eta\,\frac{\partial v(y)}{\partial y} = \eta\,\frac{v_0}{d}} \quad (3.66)$$

Kraftrichtung (x), Flächennormale (y) … Meßvorschrift für Scherviskosität η!

„Prinzip Rheometer"

• Poiseuille-Strömung: s. Übungen

• Viskositäten η, η':

Einheit: $\xrightarrow{(3.66)} \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}\cdot\frac{\text{Länge}}{\text{Geschw}} = \mathrm{Pa\cdot s} = \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}} = 10\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm\,s}}$
$= 10\,\mathrm{P(oise)}$

Werte für η: s. Folie

3.11 Die Reynoldszahl

- NS-Gln.: <u>keine</u> intrinsische Längenskala (außer Molekülgröße)

  $\longrightarrow$ NS-Gln. sind skaleninvariant (gültig auf Längen $\geq 10\,\text{nm}$)

  $\hat{=}$ Physik ist auf allen Skalen die Gleiche

  $\longrightarrow$ Ähnlichkeitsprinzip: Auto $\longleftrightarrow$ Windkanal

- NS-Gln. mit $\operatorname{div} \underline{v} = 0$, $\underline{b} = 0$

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla} p + \eta\, \underline{\nabla}^2 \underline{v} \qquad (3.67)$$

mit a … charakt. Länge [Kanalbreite, Teilchenradius]

v_0 … " Geschw. [Flußgeschw., Driftgeschw.]

Δp … " Druckabfall

$\longrightarrow$ Skalierung auf einheitenlose Größen:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \tilde{t} = t/\tfrac{a}{v_0}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\Delta p}$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{Re\left(\frac{\partial \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\underline{v}}\cdot\tilde{\underline{\nabla}}\,\tilde{\underline{v}}\right) = -\frac{1}{2}\, Eu\, Re\, \tilde{\underline{\nabla}}\, \tilde{p} + \tilde{\underline{\nabla}}^2 \tilde{\underline{v}}} \qquad (3.68)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Reynoldszahl: } Re = \frac{\rho a v_0}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{viskose Kräfte}} = \frac{\rho v_0^2/a}{\eta v_0/a^2} \\ &\text{Eulerzahl: } Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v_0^2} = \frac{\text{Druckkräfte}}{\text{Trägheitskräfte}} \end{aligned}} \qquad (3.69)$$

$\longrightarrow$ Ähnlichkeitsprinzip:

$$\boxed{\text{Systeme mit gleicher } Re \text{ \& } Eu \text{ verhalten sich gleich!}} \qquad (3.70)$$

- Einteilung:

  $Re < 1$: laminar, schleichender Fluß

  Reibung dominiert ($\rho\, \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} < \eta\, \underline{\nabla}^2 \underline{v}$)

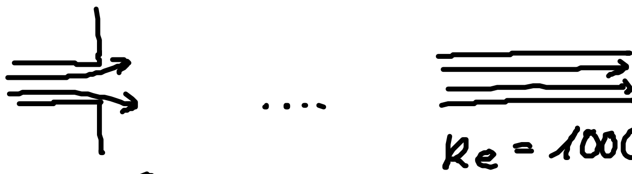
  vernachlässige $\rho \frac{dv}{dt}$ auf Zeiten a/v_0 für $Re \ll 1$!

Bsp: - Strömung um Kugel
- Tropfen geschert

$Re > 1$: Turbulenz, Trägheit dominiert

Bsp: Kaffeetasse

- Übergang zur Turbulenz: real, Geometrie abhängig



$Re = 3$ .... $Re = 1000$

- Schwimmende Organismen:

30m Wal, $v_0 = 10 \frac{m}{s} \longrightarrow Re \approx 3 \cdot 10^8$

1µm Bakterie, $v_0 = 30 \frac{\mu m}{s} \longrightarrow Re \approx 3 \cdot 10^{-5}$

- kritische viskose Kraft:

$\eta \left[\frac{kg}{ms}\right]$

$\rho \left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$$\boxed{F_{krit} = \frac{\eta^2}{\rho}} \quad (3.71) \Longrightarrow \frac{\text{äußere Kraft } F}{F_{krit}} = \begin{cases} \ll 1, \text{ laminar} \\ \gg 1, \text{ Turbulenz} \end{cases}$$

konsistent mit Re?

$$\frac{\text{Reibungskraft} \sim \eta a v_0}{\eta^2/\rho} = Re \gtrless \frac{\text{Trägheitskraft} \sim \rho v^2 a^2}{\eta^2/\rho} = Re^2 \text{ für } Re \lessgtr 1$$

Bsp: Tabelle s. Folie

insbesondere: Zelle: $F \approx 1pN$

$\longrightarrow$ dominiert durch Reibung