3.13 Hydrodynamische Moden

• Motivation:

5 Erhaltungssätze (Masse, Impuls, Energie)

$\longrightarrow$ 5 hydrodynam. Moden

• Weg: (i) linearisiere Bewegungsgln. (3.15), (3.62), (3.65)

um homogenen GG-Zustand:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &\longrightarrow \rho + \delta\rho(\underline{x},t) \\ &\quad\; \underline{v}(\underline{x},t) \\ T &\longrightarrow \bar{T} + \delta T(\underline{x},t) \end{aligned}} \quad (3.87)$$

statt innere Energie!

(ii) homogener GG-Zustand: $\rho, \bar{T}$

- Erster Satz von Bewegungsgln.: mit $\underline{b}=0$, $r_w=0$

$$\text{(3.15)}\ \xrightarrow{\varrho\to\varrho+\delta\varrho}\quad \frac{\partial\,\delta\varrho}{\partial t}+\varrho\,\mathrm{div}\,\underline{v}=0 \qquad (3.88)$$

$$\text{(3.62)}\ \xrightarrow[\text{nichtlinear}]{\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}}\quad \varrho\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}=-\underline{\nabla}p+\eta\underline{\nabla}^2\underline{v}+(\eta+\eta')\underline{\nabla}\,\mathrm{div}\,\underline{v} \qquad (3.89)$$

$$\text{(3.65)}\ \xrightarrow[\text{nichtl.}]{\underline{v}\cdot\underline{\nabla}u}\quad \varrho\frac{\partial u}{\partial t}=-p\,\mathrm{div}\,\underline{v}+\varkappa\underline{\nabla}^2T \qquad (3.90)$$

- Zerlegung:

$$\boxed{\underline{v}(\underline{x},t)=\underline{v}_l(\underline{x},t)+\underline{v}_t(\underline{x},t) \quad \text{mit } \mathrm{div}\,\underline{v}_t=0,\ \ \mathrm{rot}\,\underline{v}_l=0} \qquad (3.91)$$

longitudinaler Anteil — transversaler Anteil

a) Transversalwellen:

- Gleichg für $\underline{v}_t$: wegen $\mathrm{rot}\,\underline{\nabla}p=0$ und $\mathrm{div}\,\underline{v}_t=0$

$$\text{(3.89)}\longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\eta}{\varrho}\underline{\nabla}^2\right)\underline{v}_t=0 \qquad (3.92)$$

- Schermoden: s. Kap. 3.12 & keine Kopplung an $\delta\varrho$, δT!

$$\underline{v}_t=\underline{v}_t(\underline{k},\varphi)\,e^{-\varphi t+i\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

mit $\underline{v}_t(\underline{k},\varphi)\perp\underline{k} \Longleftrightarrow \mathrm{div}\,\underline{v}_t\sim\underline{v}_t\cdot\underline{k}=0$

$$\text{in (3.92)}\longrightarrow \boxed{\varphi_{1/2}(k)=\frac{\eta}{\varrho}k^2} \qquad (3.93)$$

... 2 Schermoden für
$2\ \underline{v}_t(\underline{k},\omega)\perp\underline{k}$!
reine diffusive Mode (keine Propagation)

b) Longitudinalmoden:

· wichtige thermodynamische Relationen

[alle Größen als Fkt. von T, ϱ]

· Umformungen der Bew.gln.:

(1) Impulsbilanz:
$$\underline{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \underline{\nabla} \delta\varrho + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial T}}_{-\varrho^2 \frac{\partial s}{\partial \varrho}\ (3.93)} \underline{\nabla} \delta T \qquad (3.104)$$

(2)
$$\underline{\nabla}^2 \underline{v}_l = \underline{\nabla} \operatorname{div} \underline{v}_l - \operatorname{rot} \underbrace{\operatorname{rot} \underline{v}_l}_{=0} = \underline{\nabla} \operatorname{div} \underline{v}_l \qquad (3.105)$$

(3) in Energiebilanz:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\varrho} \operatorname{div} \underline{v}_l = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \varrho}}_{} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \delta\varrho}_{} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial T}}_{= c_v\ (3.95)} \frac{\partial}{\partial t} \delta T + \cancel{\frac{p}{\varrho} \operatorname{div} \underline{v}_l}$$
$$\overset{(3.100)}{=} \left(\frac{\cancel{p}}{\varrho^2} + T \frac{\partial s}{\partial \varrho} \right) (-\varrho) \operatorname{div} \underline{v}_l$$

$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\varrho} \operatorname{div} \underline{v}_l = -T\varrho \frac{\partial s}{\partial \varrho} \operatorname{div} \underline{v}_l + c_v \frac{\partial}{\partial t} \delta T \qquad (3.106)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\xrightarrow{(3.88)} & &\frac{\partial}{\partial t} \delta\varrho + \varrho \operatorname{div} \underline{v}_l = 0 & &(3.107)\\
&\xrightarrow[\&\ (3.105)]{(3.83)\ \text{mit}\ (3.104)} & &\frac{\partial}{\partial t} \underline{v}_l + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varrho} \underline{\nabla} \delta\varrho - \varrho \frac{\partial s}{\partial \varrho} \underline{\nabla} \delta T - \frac{2\eta + \eta'}{\varrho} \underline{\nabla}^2 \underline{v}_l = 0 & &(3.108)\\
&\xrightarrow[(3.106)]{(3.90)\ \text{mit}} & &\frac{\partial}{\partial t} \delta T - \frac{T\varrho}{c_v} \frac{\partial s}{\partial \varrho} \operatorname{div} \underline{v}_l - \frac{\varkappa}{\varrho c_v} \underline{\nabla}^2 \delta T = 0 & &(3.109)
\end{aligned}}$$

... 3 hydrodynam. Moden aus Kopplung $\delta\varrho, \underline{v}_l, \delta T$

· Modenanalyse: Ansatz ebener Wellen:
$$\left.\begin{aligned}
\delta\varrho(\underline{x}, t) &= \delta\varrho(\underline{k}, \zeta)\, e^{-\zeta t + i \underline{k}\cdot\underline{x}}\\
\underline{v}_l(\underline{x}, t) &= v(\underline{k}, \zeta) \frac{\underline{k}}{k}\, e^{-\zeta t + i \underline{k}\cdot\underline{x}}, \quad \operatorname{rot} \underline{v}_l = 0\\
\delta T(\underline{x}, t) &= \delta T(\underline{k}, \zeta)\, e^{- \cdots}
\end{aligned}\right\} (3.110)$$

· mit (3.110) in (3.107–109):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\xi & ik\rho & 0 \\ ik\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} & -\xi + k^2\frac{2\eta+\eta'}{\rho} & -ik\rho\frac{\partial s}{\partial \rho} \\ 0 & -ik\frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho} & -\xi + \frac{\varkappa}{\rho c_v}k^2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D} \ldots \text{ dynamische Matrix}} \begin{bmatrix} \delta\rho(k,\xi) \\ v_L(k,\xi) \\ \delta T(k,\xi) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.111)$$

nicht triviale Lsg: $\boxed{\operatorname{Det}\mathcal{D} = 0 \longrightarrow \xi = \xi(k)}$ … Dispersionsrelation

„etwas kompliziert" $\longrightarrow$ in Schritten

- ohne Dissipation: $\varkappa = \eta = \eta' = 0 \longrightarrow$ keine Dämpfung

(1) Schallwellen:

$$(3.111) \longrightarrow \left.\begin{aligned} \delta T &= -\frac{ik}{\xi}\frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho} v_L \\ \delta\rho &= \frac{ik}{\xi}\rho v_L \end{aligned}\right\} \text{ in mittlere Gl. von (3.111)}$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \underbrace{(\xi^2 + c^2k^2)}_{=0} v_L = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\xi_{3/4} = \pm ick, \quad c = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s} = \frac{1}{\sqrt{\rho\varkappa_s}}} \quad (3.112)$$

- Schallwelle mit Geschw. c: $v_L \underset{\substack{\uparrow \\ \text{EV von } \mathcal{D}}}{\mathrm{d}} e^{i(\mp ckt + k\cdot x)}$
[nach rechts bzw. links laufend]
- $c \sim \frac{1}{\sqrt{\varkappa_s}}$ mit $\varkappa_s$ … isentrope Kompressibilität

[Beweis: $-\frac{k^2}{\xi}\frac{\partial p}{\partial \rho} - \xi - \frac{k^2}{\xi}\frac{T\rho^2}{c_v}\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)^2 = 0$

$$\longrightarrow \xi^2 = -k^2\left[\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{T\rho^2}{c_v}\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)^2\right]$$

$$\underset{(3.102)}{=} -k^2\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{c_p}{c_v} \overset{(3.103)}{=} -k^2\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s \quad \text{qed}]$$

(2) weiterer EV von $\mathcal{D}$:

$$\begin{pmatrix} \delta\rho \\ 0 \\ \delta T \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{in } (3.111)} \boxed{\xi_5 = 0} \quad (3.113) \longrightarrow \xi_5 = O(k^2)!$$

$$\frac{1}{\rho} ik \Big(\frac{\partial p}{\partial \rho} \delta\rho + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial T}}_{-\rho^2 \frac{\partial s}{\partial \rho}} \delta T \Big) \sim dp = 0$$

$\longrightarrow$ statische Mode $\xi_5 = 0$ mit $dp = 0$

- __mit Dissipation:__

(2) diffusive Wärmemode:

Ansatz: $\xi_5 = \underbrace{D_T k^2}_{\text{Dämpfg} \sim k^2!}$ in $\operatorname{Det} \underline{\underline{\mathcal{D}}} = 0$

& Terme führender Ordg in k $[O(k^4)]$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \Big(D_T - \frac{\kappa}{\rho c_p} \Big) k^4 = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\xi_5 = D_T k^2 \quad \text{mit} \quad D_T = \frac{\kappa}{\rho c_p}} \quad (3.114)$$

- rein diffusive Mode für Wärmeausbreitung
  D_T ... Wärmediffusionskoeffizient
- c_p statt c_v durch Kopplg an $\delta\rho$ bzw. $\operatorname{div} v_L$

(1) propagierende Schallwelle mit Dämpfg.

Ansatz: $\xi_{3/4} = \pm ick + \frac{1}{2} \Gamma k^2$ in $\operatorname{Det} \mathcal{D} = 0$

& Terme führende Ordg k $[O(k^4)]$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\begin{aligned} \xi_{3/4} &= \pm ick + \tfrac{1}{2} \Gamma k^2 \\ \text{mit } c &= \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_s} = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa_s}} \\ \Gamma &= \underbrace{D_T \Big(\frac{c_p}{c_v} - 1 \Big)}_{\text{Wärmediffusion}} + \underbrace{\frac{2\eta + \eta'}{\rho}}_{\text{Volumenviskosität}} \end{aligned}}$$

Dämpfg aufgrund