

4. Stokes Gleichungen

Navier Stokes: $\text{Re} \left(\frac{\partial \tilde{\underline{v}}}{\partial t} + \tilde{\underline{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\underline{v}} \right) = -\frac{1}{2} \text{Eu} \cdot \text{Re} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\underline{v}}$ (4.69)
(dim.-los)

Annahme $\text{Re} = \frac{\rho \cdot a \cdot v_0}{\eta} \ll 1 \rightarrow \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$ vernachlässigen

\Leftrightarrow auf Zeitskala $t \gg \tau_H = \frac{\eta^2}{6\eta/\rho}$ (3.76) $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \approx 0$

\rightarrow stat. Geschw.-Feld auf Länge λ_H (s. Kap. 3.11)

Weiterhin gilt $\text{div } \underline{v} = 0 \Leftrightarrow$ inkompressibel

$0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (+3.6)$ $0 = \text{div } \underline{v}$	Stokes-Gleichungen creeping-flow-Gl. (4.1)
--	--

4.1. Extremalprinzip: wichtiges Prinzip der Physik

z.B. $\delta S = \delta \int L dt = 0 \rightarrow$ Lagrange-Gleichungen

hier: dissipierte Energie pro Zeiteinheit $W = T \cdot \dot{\epsilon}$

$W \stackrel{(3.43)}{=} \int \text{Sp } \underline{\underline{I}}' \underline{\underline{A}} d^3x = 2\eta \int \text{Sp } \underline{\underline{\epsilon}}^2 d^3x = 2\eta \int A_{ij}^2 d^3x$
 $\underline{\underline{I}}' = 2\eta \underline{\underline{A}} \quad (3.56)$

Extremalprinzip: unter der Nebenbedingung $\text{div } \underline{v} = 0$:

$\delta \left(W - 2 \int p \text{div } \underline{v} d^3x \right) = 0$ <p>Drocks p: Lagrangeparameter</p>	\Leftrightarrow Übung	$0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (4.3)$ <p><u>R.B.:</u> z.B. $\underline{v} = 0$ Oberfläche oder $\underline{\underline{I}} \cdot \underline{n} _{\partial V} = 0$ kräftefrei</p>
---	----------------------------	---

\rightarrow stationäre Strömungsprofile stellen sich so an, dass W ein Extremum annimmt!

4.3. Bilanzmassische Gleichungen

Herleitung:

$$\operatorname{div} (0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v}) \hat{=} -\partial_i \partial_i p + \eta \partial_i \partial_j \partial_j v_i \Rightarrow \boxed{\nabla^2 p = 0 \quad (4.4a)}$$

$$\nabla^2 (0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v}) = -\partial_k \partial_k \partial_i p + \eta \partial_k \partial_k \partial_j \partial_j v_i \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \nabla^2 \underline{v} = 0 \quad (4.4b)}$$

→ Separate Gl. für \underline{v} und p !

Einschub:

Geometrie:



$$\frac{1}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underline{v}(\underline{x}) d\mathbf{f} = \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2\right) \underline{v}(\underline{x}_p)$$

mit $\underline{v}(\underline{x})$ Lösung der Stokes-Gl. (Ableitung nach \underline{x}_p)

Beweis: verwendet (4.4b) (4.5)

(1) Taylorentw. von \underline{v} : $(f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots)$
 (mit $\Delta \underline{x}_p \hat{=} \underline{x} - \underline{x}_p$)

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}_p) + \Delta \underline{x}_p \cdot \nabla_p \underline{v}(\underline{x}_p) + \frac{1}{2} (\Delta \underline{x}_p \otimes \Delta \underline{x}_p) \cdot (\nabla_p \otimes \nabla_p) \underline{v}(\underline{x}_p) + \dots + \frac{1}{n!} (\Delta \underline{x}_p)^n \cdot \nabla_p^n \underline{v}(\underline{x}_p)$$

(2) Einsetzen in Integral! → in: $\frac{1}{4\pi a^2} \int \underline{v}(\underline{x}) d\mathbf{f}$

(i) $\int (\Delta \underline{x}_p)^n d\mathbf{f} = 0$ n ungerade ($\Delta \underline{x}_p$ und $-\Delta \underline{x}_p$ kommen vor)

(ii) $\int (\Delta \underline{x}_p \otimes \Delta \underline{x}_p) d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{3} a^2 \underline{\underline{1}}$ $\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= c \underline{\underline{1}}$

$\xrightarrow{\text{Spur}} 3c = |\Delta \underline{x}_p|^2 \int d\mathbf{f} = a^2 \int d\mathbf{f} = 4\pi a^2 \Rightarrow c = \frac{4\pi}{3} a^2$

(iii) $\int (\Delta \underline{x}_p \otimes \Delta \underline{x}_p \otimes \dots) d\mathbf{f} = ?$ n gerade
 n -mal

z.B. für $n=4$: $\dots \nabla_p^2 \nabla_p^2 \underline{v}(\underline{x}_p) \stackrel{(4.4b)}{=} 0$

g.e.d.

4.3. Oseen-Tensor : (4.1): linear in \underline{v} und $\underline{p} \rightarrow$ Methode der Green'schen Funktion (Superpositionsprinzip)

Suche \underline{Q} und \underline{g} für:
Lösung für (4.1) für geg. \underline{g}_b

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= \int d^3x' \underline{Q}(\underline{x}-\underline{x}') \underline{g}_b(\underline{x}') \\ \underline{p}(\underline{x}) &= \int d^3x' \underline{g}(\underline{x}-\underline{x}') \cdot \underline{g}_b(\underline{x}') \end{aligned} \right\} (4.6)$$

mit $\underline{Q}(\underline{x}-\underline{x}')$: Oseen-Tensor } Green'sche Funktionen
 $\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}')$: Druck-Vektor }

N.B: (i) \underline{Q} : Tensor 2. Stufe: "Vektor \rightarrow Vektor"
(ii) \underline{g} : Vektor: "Vektor \rightarrow Skalar"

Bestimmungsgh. für \underline{Q} und \underline{g} : Einsetzen in Stokes! (4.6) in (4.1)

$$\rightarrow \begin{cases} 0 = \int d^3x' \{ -\underline{\nabla} [\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}') \cdot \underline{g}_b(\underline{x}')] + \eta \nabla^2 [\underline{Q}(\underline{x}-\underline{x}') \underline{g}_b(\underline{x}')] \} + \underline{g}_b \\ 0 = \int d^3x' \operatorname{div} [\underline{Q}(\underline{x}-\underline{x}') \underline{g}_b(\underline{x}')] \end{cases}$$

$\int_{\Omega} f(\underline{x}) \cdot \delta(\underline{x}) d\underline{x} = f(\underline{a})$

wähle: $\underline{g}_b(\underline{x}') = \underline{e} \delta(\underline{x}')$

$$\rightarrow \begin{cases} 0 = -\underline{\nabla} [\underline{g}(\underline{x}) \cdot \underline{e}] + \eta \nabla^2 [\underline{Q}(\underline{x}) \underline{e}] + \underline{e} \delta(\underline{x}) & \text{Vektorwert} \\ 0 = \operatorname{div} [\underline{Q}(\underline{x}) \underline{e}] & \text{Skalar} \end{cases} \quad (\partial_i \delta_{ij} \underline{e}_j \rightarrow \partial_i \delta_{ij}^T)$$

\underline{e} beliebig!

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla} \otimes \underline{g}(\underline{x}) - \eta \nabla^2 \underline{Q}(\underline{x}) &= \underline{1} \delta(\underline{x}) & (4.7a) & \text{Tensor} \\ \operatorname{div} \underline{Q}^T(\underline{x}) &= \underline{0} & (4.7b) & \text{Vektor} \end{aligned}}$$

Lösung für $V \rightarrow \infty$, $\underline{v}(\underline{x} \rightarrow \infty) = 0$

(i) Druck-Vektor \underline{g} : $\operatorname{div} [(4.7a)^+]$ & Verwende (4.7b)

$$\rightarrow \nabla^2 \underline{g}(\underline{x}) = \underline{\nabla} \delta(\underline{x}) \quad (4.8)$$

$$\left(\begin{aligned} \nabla^2 \underline{Q} &\hat{=} \partial_i \partial_j \delta_{mn} \\ \operatorname{div} (\nabla^2 \underline{Q})^+ &\hat{=} \partial_m \partial_i \partial_j \delta_{nm} = 0 \end{aligned} \right) \quad (4.7b)$$

Einschub: Elektrostatik:

(4.9) $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\underline{x})$ mit $r = |\underline{x}|$
 \leftarrow Green'sche Fkt. der Poisson-Gl.

∇ (4.9) & vgl. mit (4.8): $g(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \sim \delta(\underline{x})$

$\Rightarrow \boxed{g(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{x}}{r^3}} \quad (4.10)$ Dipol (dann $\nabla g(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\underline{x}}{r^3}$)
 $\rightarrow \nabla^2 g(\underline{x}) = \underline{\nabla} \delta(\underline{x})$

Denn: $\underline{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \underline{\nabla} r$

$\partial_x r = \partial_x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2r} \cdot 2x = \frac{x}{r}$

$\Rightarrow \underline{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\underline{x}}{r^3}$

Lösung für $\Delta \phi = \delta(\underline{x})$

(i) (4.10) in (4.7a): $-\frac{1}{4\pi} (\underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}) \frac{1}{r} - \gamma \underline{\nabla}^2 \underline{Q}(\underline{x}) = \underline{1} \delta(\underline{x}) \quad (4.11)$

o. Basis:

$\underline{Q}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\gamma r} \left(\underline{1} + \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2} \right) \quad (4.15)$

Oseen-Tensor

Ansatz: $\underline{Q}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r} \underline{1} + \hat{\underline{Q}} \right) \quad (4.12)$

z.B. Geschwindigkeitsfeld einer Punktquelle $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{f}_0 \delta(\underline{x} - \underline{x}_0)$

in (4.6):

$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{Q}(\underline{x} - \underline{x}_0) \underline{f}_0 \quad (4.16)$ Stokeslet

N.B.: allgemein: $\underline{v}(\underline{x}) =$ Superposition von Stokeslets

o wichtige Anwendung: hydrodynamische Wechselwirkungen s. Kap. 6

