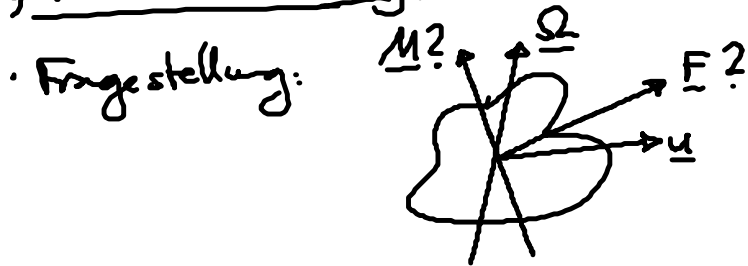


4.6 Hydrodynamische Reibung von Teilchen

in Kap. 4.4: Stokes Reibung von Kugeln

a) Teilchen beliebiger Gestalt



Geg: $\underline{u}, \underline{\Omega}$ \rightarrow Ges: äußere Kraft \underline{F} , Drehmoment \underline{M}

• Stokes'sche Gln. linear in \underline{v} \rightarrow lineare Beziehung:

$$\begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\beta} & \underline{C} \\ \underline{C}^t & \underline{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\Omega} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Bem: (i) $\left. \begin{matrix} \underline{\beta} \\ \underline{\beta} \end{matrix} \right\}$ Reibungstensoren für $\left\{ \begin{matrix} \text{Translation} \\ \text{Rotation} \end{matrix} \right.$

(ii) \underline{C} ... Kopplungstensor für Translation und Rotation

(iii) Es gilt: $\underline{\beta}^t = \underline{\beta}, \underline{\beta} = \underline{\beta}^t, \underline{C}$ und \underline{C}^t (4.38)

Beweis: im Prinzip: Onsager'sche Reziprozitätsrelation (s. Kap. 3.8.6)

Stokes Gln.: Spezielles Reziprozitätskriterium

(iv) $\underline{\beta}, \underline{\beta}, \underline{C}$ müssen Symmetrie des Teilchens wieder spiegeln

(v) Bsp: Kugel (vgl. Kap. 3.4)

$$\underline{\beta} = 6\pi\eta a \underline{1}, \underline{\beta} = 8\pi\eta a^3 \underline{1}, \underline{C} = \underline{0} \quad (4.39)$$

Beweis: $\underline{\underline{C}} = 0$

(1) $\underline{\underline{C}}$... Pseudotensor 2. Stufe

$\hat{=} \underline{\underline{C}} \rightarrow -\underline{\underline{C}}$ unter Punktspiegelung
am Ursprung ($\underline{R} = -\underline{1}$)

Grund: polare Vektoren $\underline{F}, \underline{u} \xrightarrow{\underline{R}=-\underline{1}} -\underline{F}, -\underline{u}$

Pseudo-axiale Vektoren $\underline{M}, \underline{\Omega} \xrightarrow{\underline{R}=-\underline{1}} \underline{M}, \underline{\Omega}$

(2) Symmetriegruppe der Kugel: $O(3)$

$\underline{\underline{C}} \sim \underline{1} = -\underline{\underline{C}} \rightarrow \underline{\underline{C}} = 0$

$\rightarrow \underline{\underline{C}} = 0$

• dissipierte Energie pro Zeiteinheit:

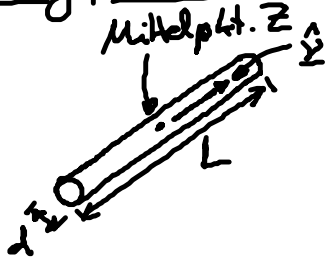
$$\boxed{W = \underline{F} \cdot \underline{u} + \underline{M} \cdot \underline{\Omega}} \quad (4.40)$$

$$\stackrel{(4.37)}{=} \underline{u} \cdot \underline{\beta} \underline{u} + \underline{\Omega} \cdot \underline{\beta} \underline{\Omega} + 2 \underline{u} \cdot \underline{C} \underline{\Omega}$$

• $\underline{\Omega}, \underline{M}$ relativ zu Pkt. gewählt \rightarrow

führen ein: Reaktionszentrum, so daß $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^t$ (4.41)

b) langer, dünner Stab:



$\frac{L}{d}$... Aspektverhältnis

• Kopplungstensor (für $Z = \text{Reaktionszentrum}$)

$$\boxed{\underline{\underline{C}} = 0 \rightarrow \underline{F} = \underline{\beta} \underline{u}} \quad (4.42)$$

$$\underline{M} = \underline{\beta} \underline{\Omega}$$

• Translation:

$$\underline{\underline{\rho}} = \gamma_{\parallel} \underline{\underline{\rho}}_0 + \gamma_{\perp} (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\rho}}_0 \underline{\underline{\rho}}_0) \quad (4.43)$$

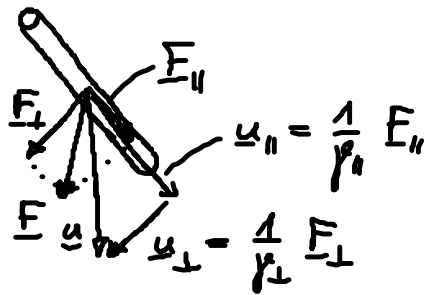
mit $\gamma_{\perp} \approx \frac{4\pi\eta}{\ln(L/d)} L \approx 2\gamma_{\parallel}$, $L \gg d$

Bem: (i) Rotationsymmetrie um $\underline{\underline{\hat{v}}}$ \longrightarrow $\underline{\underline{\rho}} \hat{=} \begin{pmatrix} \gamma_{\perp} & 0 \\ 0 & \gamma_{\parallel} \end{pmatrix}$
 [Fund: c_{∞} -Achse \hat{v}] Matrixform

\longrightarrow 2 Beibehaltung: $\underline{\underline{u}} \parallel \underline{\underline{\hat{v}}} \rightarrow \underline{\underline{F}} = \gamma_{\parallel} \underline{\underline{u}}$
 $\underline{\underline{u}} \perp \underline{\underline{\hat{v}}} \rightarrow \underline{\underline{F}} = \gamma_{\perp} \underline{\underline{u}}$ } (4.44)

(ii) i.a. $\underline{\underline{F}} \parallel \underline{\underline{u}}$

Bsp:



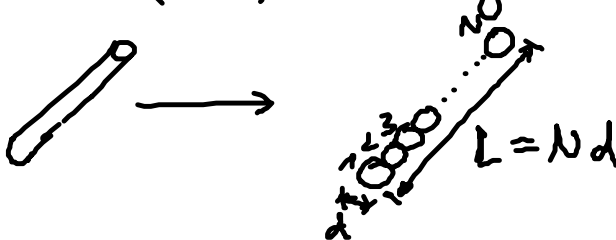
\longrightarrow Driftbewegung $\perp \underline{\underline{F}}$

(Bsp: $\underline{\underline{F}}$: Gravitationskraft)

(iii) Randeffekte des Stabes: $\gamma_{\perp} \neq 2\gamma_{\parallel}$

Bsp: $\gamma_{\perp} = \frac{3}{2} \gamma_{\parallel}$ $f = \frac{L}{d} \approx 20$

(iv) Beweis von (4.33): s. Übung



Jede Kugel \longrightarrow Stokeslet $\underline{\underline{v}}_j(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}}_j) \frac{\underline{\underline{F}}}{N}$

Kraft verteilt sich homogen auf alle Kugeln

$$\rightarrow \underline{u} = \underline{u}(\underline{x}_i) = \underbrace{\frac{1}{3\pi\eta d} \frac{F}{N}}_{\text{durch Kraft auf Kugel } i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \underline{v}_j(\underline{x}_i)}_{\text{von anderen Kugeln}}$$

• Rotation: (o.B.)

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{M} &= \beta \underline{\Omega} \perp \hat{\underline{v}} \\ \text{mit } \beta &= \frac{\pi \eta L^3}{3 \ln(L/d)} \end{aligned}} \quad (4.45)$$

c) Helix = Schraubenlinie:

• Geometrie:  Ganghöhe $p \rightarrow$ Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{p}$

Ortsvektor: $\underline{x} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ p \frac{\varphi}{2\pi} \end{pmatrix}, \hat{\underline{v}} \parallel \underline{e}_z, \varphi \dots$ Azimutalwinkel

Rechts- } Punkt- { Linksschraube
 redthändige } spiegelung { linkshändige Helix

... chirales Objekt

• Beschränkung: $\underline{F}, \underline{M}, \underline{u}, \underline{\Omega} \parallel \hat{\underline{v}}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & C \\ C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{2\pi}{\sqrt{R^2 + k^2}} \left(\int_{\parallel} k^{-2} + \int_{\perp} R^2 \right) \\ \beta &= \frac{2\pi}{\sqrt{\cdot}} R^2 \left(\int_{\parallel} R^2 + \int_{\perp} k^{-2} \right) \\ C &= \frac{2\pi}{\sqrt{\cdot}} k^{-1} R^2 \left(\int_{\parallel} - \int_{\perp} \right) \end{aligned} \right\} (4.47)$$

für eine Geyhohe

$\gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp} \dots$ Reibungscoeff. pro Längeneinheit

\parallel, \perp Helix segment

$$\gamma_{\perp} \approx 2\gamma_{\parallel} \quad [\text{s. Gl. (4.43)}]$$

Beweis: s. Übungen ??

Behalte φ, Ω
 $\varphi + \Omega$

Berechne $\underline{F}, \underline{M}$ durch Integration

von $\underline{f} = [\gamma_{\parallel} \underline{t} + \gamma_{\perp} (1 - \underline{t} \cdot \underline{t})] \underline{v}$ entlang

Schraublinie

$\underline{t} \dots$ Tangentialvektor

• Translations-Rotationskoppung: $C \sim \gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp} \neq 0!$

also: $\Omega \rightarrow F = C \Omega \dots$ Schubkraft

$u \rightarrow M = C u \dots$ „Schubdrehmoment“

(i) anschaulich: Rotation \rightarrow Reibungskraft zw. \parallel Helixachse
 \rightarrow Schubkraft

s. Folie

(ii) abstrakt: Punkt spiegelg am Ursprung

rechtsdrehig \rightarrow linksdrehig Helix

$$\underline{u}, \underline{F} \rightarrow -\underline{u}, -\underline{F}$$

$$\underline{\Omega}, \underline{M} \rightarrow \underline{\Omega}, \underline{M}$$

$$\text{also: } \begin{pmatrix} -F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -C \\ -C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u \\ \Omega \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow C \dots$ Pseudoskalar: $C \approx \pm 1$ für Rechts-/Linksdrumme eines dualen Objekts

(iii) nichtdualer Objekt:



$$\text{Reibematrix: } \begin{pmatrix} \gamma & C \\ C & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & -C \\ -C & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

• unvollständige Helix: [Höhe $\neq n p$, $n \in \mathbb{N}$]

$\underline{\Omega}, \underline{u} \parallel \underline{\nabla} \rightarrow \underline{F} \perp \underline{\nabla} \dots$ Driftbewegung!

4.7 Kinematische Reversibilität

• oft als „Zeitumkehr-Invarianz“ bezeichnet

Sei $\underline{v}(\underline{x}, t)$ Lsg. der Stokes Gln.

$t \rightarrow -t$: $\underline{v}(\underline{x}, t) \rightarrow -\underline{v}(\underline{x}, -t)$ Lösung

falls $\underline{\nabla} p \rightarrow -\underline{\nabla} p$
 $\underline{g}^b \rightarrow -\underline{g}^b$ } Kräfte umkehren

(4.50)

\dots „reversible Strömungen“

Bsp: a) Taylor - Vermahl

b) Pine et al., Nature 438, 997 (2005)

gesdarte Teilchen suspension \rightarrow Irreversible Brownsche Bewegung jenseits kritischer Scherrate!