

7.3 Mikroschwimmer

→ s. Folien

8. Die Brownsche Bewegung: DER stochastische Prozeß

• Motivation:

- (i) Beispiel an dem Theorie der stochastische Prozesse entwickelt wurde
- (ii) Illustration der Grundkonzepte, Details dann in Kap. 10 & 11

8.1 Historie

- 1827: Robert Brown: beobachtet Samenkörner im Wasser gelöst/suspendiert (unterem Mikroskop)



→ irreguläre Bewegung
organischer Ursprung der Bewegung wurde ausgeschlossen

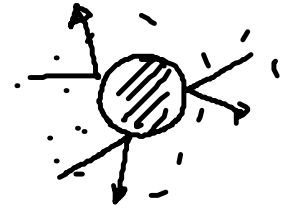
- 1905: erste Erklärung durch Einstein: Ann. Phys. (Leipzig) 17, 549 (1905)
"Über die von der molekulär-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in verdünnten Flüssigkeiten suspendierten Teilchen"

Ein stein: irreguläre Bewegung aufgrund von Stößen der Flüssigkeitsmoleküle, die statistisch unabhängig voneinander erfolgen

klassische Beschreibung

→ Kap. 8.3

- 1906: parallele Beschreibung durch Smoluchowski, formale Ansammlung der Konzepte
- 1906: alternative Theorie durch Langevin



8.2 Die Langevin-Gleichung: eine statistische Differentialgleichung

- hier: rote Zugang, Ansammlung in Kap. 10 & 11
- Bewegungsgleichung für suspend. Teilchen (10):

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \underbrace{T(t)}_{\text{Zufalls-/stochastische Kraft}} \quad (8.1)$$

$\gamma = 6\pi\eta a$
Reibungskraft

Zufalls-/stochastische Kraft durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle
hier: thermischer Ursprung durch Wärmebewegung der Fl. Moleküle
statistische Beschreibung und Stärke von T → Kap. 10

Verallgemeinerung: nicht-thermischer Ursprung → Kap. 11

Bsp: aktive Brownsche Teilchen
= Teilchen mit innerem Antrieb & stochastischer Kraft

- Berechnung von Mittelwerten: $\langle \dots \rangle$

Mittelwert über verschiedene Realisierungen von $T(t)$ → unterschiedliche Teilchentrajektorien

(i) mittlerer Ort: $\langle x \rangle$:

$$\langle (8.1) \rangle \rightarrow m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = -\gamma \frac{d}{dt} \langle x \rangle + \underbrace{\langle T \rangle}_{=0, \text{ da } T = \pm f \text{ gleichwahrscheinlich}}$$

$$\rightarrow \boxed{\langle x \rangle = x_\infty (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})}$$

mit $\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & t=0 \\ x_\infty, & t \rightarrow \infty \end{cases}$ (8.3)

$$\boxed{\tau = \frac{m}{\gamma}} \quad (8.4)$$

... Impulsrelaxationszeit!

(ii) mittlere quadratische Verschiebung $\langle x^2 \rangle$:

Berechne: $\langle (8.1) x \rangle \rightarrow m \langle x \ddot{x} \rangle + \gamma \underbrace{\langle x \dot{x} \rangle}_{= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle} = \underbrace{\langle T(H|x) \rangle}_{=0}$
 $= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - \langle \dot{x}^2 \rangle$
 $T = \pm f$ gleichwahrscheinlich, unabh. von x !

verwende: $\boxed{\frac{m}{2} \langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{k_B T}{2}}$ (8.5)

... Gleichverteilungssatz

$\hat{=}$ „Info über Stärke von T “

$$\rightarrow \frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = k_B T \quad (8.6)$$