

... 11.2. Integrale nach Ito & Stratonovich

$$\dot{x} = h(x, t) + g(x, t) \Gamma(t) \quad (11.1)$$

$$x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x, t') dt' + \int_t^{t+\tau} g(x, t') \underbrace{\Gamma(t') dt'}_{dW(t')} \quad (11.5)$$

mit $\langle W(t) \rangle = 0$
 $\langle W(t+\tau) W(t) \rangle = t$

(11.4)

$$A_I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N g[x(t_i), t_i] \overbrace{(W(t_{i+1}) - W(t_i))}^{\Delta W(t_i)} \quad (11.6)$$

$$A_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum g\left(\frac{x(t_i) + x(t_{i+1})}{2}, \frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) \Delta W(t_i) \quad (11.7)$$

Beispiel: $\int_0^t W(t) dW(t)$

(i) $A_I = \lim \sum W(t_i) \Delta W(t_i)$

$$= \lim \frac{1}{2} \sum \left\{ [W(t_i) + \Delta W(t_i)]^2 - W^2(t_i) - \Delta W^2(t_i) \right\} \quad \text{nachrechnen}$$

$$= \lim \left(\frac{1}{2} [W^2(t_{N+1}) - \underbrace{W^2(0)}_{=0}] - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \Delta W^2(t_i) \right)$$

Berechne im Mittel!

$$\langle \sum \Delta W^2(t_i) \rangle = \sum \langle [W(t_{i+1}) - W(t_i)]^2 \rangle$$

$$= \sum_i \langle W^2(t_{i+1}) - 2W(t_{i+1})W(t_i) + W^2(t_i) \rangle$$

$$= \sum_i \underbrace{(t_{i+1} - 2t_i + t_i)}_{\Delta t} = t$$

$$\rightarrow A_I = \frac{1}{2} W^2(t) - \frac{1}{2} t \quad (11.8)$$

insb. $\langle A_I \rangle = 0$

$$(ii) A_s = \lim \sum \frac{W(t_i) + W(t_{i+1})}{2} [W(t_{i+1}) - W(t_i)]$$

$$A_s = \lim \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [W^2(t_{i+1}) - W^2(t_i)] = \frac{1}{2} W^2(t) \neq A_I \quad (11.9)$$

$$\text{insb.: } \langle A_s \rangle = \frac{t}{2}$$

N.B. bei Stratonovich: Integrationsregeln wie bei Riemann-Integral
bei Ito: Andere Regeln

11.3 Stochastische DGL II

• verschiedene Interpretationen der SDG:

(i) Ito-Interpretation: (11.5) mit $\tau = dt \rightarrow 0$, $t' = t$

$$x(t+dt) = x(t) + h(x,t) dt + \underbrace{g(x,t)}_{\text{zur Anfangszeit } t} dW(t) \quad (11.10)$$

zur Anfangszeit t !! \Leftrightarrow Ito!

Führe ein wegen:

$$\langle dW^2(t) \rangle = \langle [W(t+dt) - W(t)]^2 \rangle$$

$$\downarrow$$

$$= t+dt - 2t + t = dt$$

$dW(t) = dw \sqrt{dt}$

(11.11)

$$0 \stackrel{(11.4)}{=} \langle dW \rangle = \langle dw \sqrt{dt} \rangle = \langle dw \rangle \sqrt{dt}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow dx(t) &= x(t+dt) - x(t) \\ &= h(x,t) dt + g(x,t) dw \sqrt{dt} \end{aligned}$$

mit $\langle dw \rangle = 0$
 $\langle dw^2 \rangle = 1$

$$\langle dW^2 \rangle = \underbrace{\langle dw^2 \rangle}_1 dt = dt$$

(11.12)

... SDG in Ito-Interpretation

Bem: dw ... Gaußsche Zufallsvariable, Varianz 1

(ii) Stratonovich-Interpretation

"verwendete Stratonovich-Regel"

Schreibe formal

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= h(x,t) dt + g(x,t) \circ dw \sqrt{dt} \\ \text{mit } \langle dw \rangle &= 0 \\ \langle dw^2 \rangle &= 1 \end{aligned}} \quad (11.13)$$

... SDh in Stratonovich-Interpretation

Berechne: [mit $dW = dw \sqrt{dt}$] $x(t) + dx$ denn $\frac{dx}{dt} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$

$$g(x,t) \circ dW(t) = g\left(\frac{x(t) + x(t+dt)}{2}, \frac{t + t+dt}{2}\right) dW(t) = g\left(x(t) + \frac{dx}{2}, t + \frac{dt}{2}\right) dW(t)$$

Taylor: (Terme bis $\sim dt$)

$$= \left[g(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x,t} dx + \dots \right] dW(t) + \mathcal{O}(dt^{3/2})$$

→ mit $dx = g(x,t) dW + \mathcal{O}(dt)$

$$\left[\text{z.B. } \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \sim \mathcal{O}(dt) \rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} dt = \mathcal{O}(dt^2) \text{ etc.} \right]$$

$$= g(x,t) dW(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x} g \underbrace{dW^2(t)}_{dt} + \mathcal{O}(dt^{3/2}) \quad (11.14)$$

"=" dt im quadr. Mittel

weiterer Driftterm!

also: (11.13) mit (11.14)

$$\rightarrow \boxed{dx(t) = \left[h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \right] dt + g(x,t) dw \sqrt{dt}} \quad (11.15)$$

... SDh in Stratonovich-Interpretation!

Beachte: $g, \frac{\partial g}{\partial x}$ bei x,t ! → in Ito-Form!

• Kravars-Moyal-Koeffizienten: „Signaturen einer SDG“!

$$D^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\langle \underbrace{[x(t+\tau) - x]_n}_{dx} \right\rangle \quad (11.16)$$

(i) Ito-SDG: lese direkt von (11.12) ab

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned} \quad (11.17)$$

(ii) Stratonovich-SDG: aus (11.15):

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned} \quad (11.18)$$

• mehrdimensionale SDG: $x = (x_1, \dots, x_n)$ z.B. viele Teilchen

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= h_i(x,t) + g_{ij}(x,t) \Gamma_j(t) \\ \text{mit } \langle \Gamma_j(t) \rangle &= 0 \quad \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t-t') \end{aligned} \quad (11.19)$$

(i) Ito-Interpretation:

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= h_i(x,t) dt + g_{ij}(x,t) dw_j \sqrt{dt} \\ \text{mit } \langle dw_i \rangle &= 0 \\ \langle dw_i dw_j \rangle &= \delta_{ij} \\ \rightarrow D_i^{(1)}(x,t) &= h_i(x,t) \\ D_{ij}^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g_{ik}(x,t) g_{jk}(x,t) \end{aligned} \quad (11.20)$$

(ii) Stratonovich-Interpretation

$$dx_i(t) = h_i(x,t) dt + g_{ij}(x,t) \circ dw_j \sqrt{dt}$$

$$dx_i(t) = D_i^{(1)}(x,t) dt + g_{ij}(x,t) dw_j \sqrt{dt}$$

mit $\langle dw_i \rangle = 0$, $\langle dw_i dw_j \rangle = \delta_{ij}$

$$D_i^{(1)}(x,t) = h_i(x,t) + \frac{1}{2} g_{kj}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(x,t)$$

(11.21)

$$D_{ij}^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2} g_{ik}(x,t) g_{jk}(x,t)$$

Anwendung der verschiedenen Interpretationen:

(i) physikalische Prozesse mit Korrelationen auf kleiner Zeitskala ε :

also: idealisiert $\langle \Gamma(t) \Gamma(t') \rangle = \delta(t-t')$

Realität: $\langle \Gamma(t) \Gamma(t') \rangle = \delta_\varepsilon(t-t')$



→ Stratonovich-Interpretation

Warum? vgl. Berechnung von $D^{(1)}$ in Kap 10.3

$$(1) A = \left\langle \int_t^{t+\tau} \int_t^{t'} \Gamma(t'') \Gamma(t') dt'' dt' \right\rangle = \frac{\tau}{2}$$

mit $\langle \Gamma(t'') \Gamma(t') \rangle = \delta_\varepsilon(t'-t'')$

(2) über Wiener Prozess (Erinnere: $dw = \Gamma(t) dt$)

$$A_s = \left\langle \int_t^{t+\tau} \int_t^{t'} dw(t'') dw(t') \right\rangle$$

$$= \left\langle \int_t^{t+\tau} \underbrace{[W(t'') - W(t)]}_{\text{Stratonovich}} dw(t'') \right\rangle = \left\langle \frac{W^2(t+\tau) - W^2(t)}{2} - W(t) [W(t+\tau) - W(t)] \right\rangle$$

(11.4): $\langle W(t+\tau) W(t) \rangle = t$ (11.9)

$$\Rightarrow \langle W^2(t+\tau) \rangle = \langle W(t+\tau) W(t+\tau) \rangle = t+\tau$$

$$\langle W^2(t) \rangle = t$$

$$\langle W(t) W(t+\tau) \rangle = t$$

$$\langle W^2(t) \rangle = t$$

$$\Rightarrow A_S = \frac{1}{2} (t + \tau - t) - t + t = \frac{\tau}{2}$$

aber $A_I = 0$!

(ii) Biologie: oft diskrete Prozesse \rightarrow Ito-Interpretation

(iii) Analyse von Zeitreihen:

Bsp: Zufallsweg eines Mikroorganismus:



Bem.: Die Wahl zwischen Ito & Stratonovich spielt nur eine Rolle wenn Rauschterm Ortsabhängig!

$$\dot{x} = h(x,t) + \underline{g(x,t)} \Gamma(t)$$

• Beispiel:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i + \gamma_{ij} x_j &= \Gamma_i(t) \quad i=1, \dots, N \\ \langle \Gamma_i(t) \rangle &= 0 \quad \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = \gamma_{ij} \delta(t-t'), \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \end{aligned} \quad (1.22)$$

... Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Bem: (1) lineare SDG

(2) γ_{ij} ... Stärke des Rauschens

(3) $N=1, x=v$... 1D-Brownsche Bewegung mit Trägheit

(4) $\gamma_{ij}=0$... Wiener-Prozess!

Lösungen: ... s. H. Risken, The Fokker-Planck-Equation (Springer)