... 11.2. Integrale nach Ito & Stratonovich

$$\dot{x} = h(x,t) + g(x,t)\,\Gamma(t) \qquad (11.1)$$

$$x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x,t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} g(x,t')\,\underbrace{\Gamma(t')\,dt'}_{dW(t')} \qquad (11.5)$$

mit $\langle W(t)\rangle = 0$

$\langle W(t+\tau)\,W(t)\rangle = t \qquad (11.4)$

$$A_I = \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{i=0}^{N} g[x(t_i), t_i]\,\overbrace{\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)}^{\Delta W(t_i)} \qquad (11.6)$$

$$A_S = \lim_{\Delta t\to 0} \sum g\left(\frac{x(t_i)+x(t_{i+1})}{2}, \frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right) \Delta W(t_i) \qquad (11.7)$$

Beispiel: $\int_0^t W(t)\,dW(t)$

(i) $A_I = \lim \sum W(t_i)\,\Delta W(t_i)$

$= \lim \frac{1}{2} \sum \left\{ [W(t_i) + \Delta W(t_i)]^2 - W^2(t_i) - \Delta W^2(t_i) \right\}$ nachrechnen

$$= \lim \left(\frac{1}{2}\left[W^2(\underset{=t}{t_{N+1}}) - \underbrace{W^2(0)}_{=0}\right] - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=0}^{N} \Delta W^2(t_i)}_{\text{Berechne im Mittel!}}\right.$$

$$\left\langle \sum \Delta W^2(t_i)\right\rangle = \sum \left\langle [W(t_{i+1}) - W(t_i)]^2 \right\rangle$$

$$= \sum_i \left\langle W^2(t_{i+1}) - 2W(t_{i+1})W(t_i) + W^2(t_i)\right\rangle$$

$$= \sum_i \left(\underbrace{t_{i+1} - 2t_i + t_i}_{\Delta t}\right) = t$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A_I = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}t \\ \text{insb. } \langle A_I\rangle = 0 \end{array}} \qquad (11.8)$$

(ii) $A_S = \lim \sum \frac{W(t_i)+W(t_{i+1})}{2} [W(t_{i+1}) - W(t_i)]$

$$A_S = \lim \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} [W^2(t_{i+1}) - W^2(t_i)] = \frac{1}{2} W^2(t) \neq A_I \quad (11.9)$$

insb.: $\langle A_S \rangle = \frac{t}{2}$

N.B. bei Stratonovich: Integrationsregeln wie bei Riemann-Integral
bei Ito: Andere Regeln

11.3 Stochastische DGL II

- verschiedene Interpretationen der SDG:

(i) Ito-Interpretation: (11.5) mit $\tau = dt \to 0$, $t' = t$

$$x(t+dt) = x(t) + h(x,t)\,dt + \underbrace{g(x,t)}_{\text{zur Anfangszeit } t\ !!\ \Leftrightarrow \text{ Ito!}}\,dW(t) \quad (11.10)$$

Führe ein wegen:

$$\langle dW^2(t) \rangle = \langle [W(t+dt) - W(t)]^2 \rangle = t + dt - 2t + t = dt$$

$$\boxed{dW(t) = dw\sqrt{dt}} \quad (11.11)$$

$$0 \overset{(11.4)}{=} \langle dW \rangle = \langle dw\sqrt{dt} \rangle = \langle dw \rangle \sqrt{dt}$$

$$\langle dW^2 \rangle = \underbrace{\langle dw^2 \rangle}_{1} dt = dt$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} dx(t) &= x(t+dt) - x(t) \\ &= h(x,t)\,dt + g(x,t)\,dw\sqrt{dt} \\ \text{mit } &\langle dw \rangle = 0 \\ &\langle dw^2 \rangle = 1 \end{aligned}} \quad (11.12)$$

... SDG in Ito-Interpretation

Bem: dw ... Gaußsche Zufallsvariable, Varianz 1

(ii) Stratonovich-Interpretation

"verwende Straton.-Regel"

Schreibe formal

$$\boxed{\begin{aligned} &dx(t) = h(x,t)\,dt + g(x,t) \circ dw\sqrt{dt} \\ &\text{mit} \quad \langle dw \rangle = 0 \\ &\qquad\;\; \langle dw^2 \rangle = 1 \end{aligned}} \quad (11.13)$$

... SDG in Stratonovich-Interpretation

Berechne: [mit $dW = dw\sqrt{dt}$]

$x(t)+dx$ denn $\frac{dx}{dt} = \frac{x(t+dt)-x(t)}{dt}$

$$g(x,t) \circ dW(t) = g\left(\frac{x(t)+x(t+dt)}{2}, \frac{t+t+dt}{2}\right) dW(t) = g\left(x(t)+\frac{dx}{2}, t+\frac{dt}{2}\right) dW(t)$$

Taylor: (Terme bis $\sim dt$)

$$= \left[g(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x,t} dx + \dots\right] dW(t) + \mathcal{O}\left(dt^{3/2}\right)$$

mit $dx = g(x,t)\,dW + \mathcal{O}(dt)$

[z.B. $\frac{\partial}{\partial t} g \sim \mathcal{O}(dt) \rightarrow \frac{\partial g}{\partial t} dt = \mathcal{O}(dt^2)$ etc.]

$$= \underbrace{g(x,t)\,dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} g \underbrace{dW^2(t)}_{\text{"=" } dt \text{ im quadr. Mittel}}}_{\text{weiterer Driftterm!}} + \mathcal{O}\left(dt^{3/2}\right) \quad (11.14)$$

also: (11.13) mit (11.14)

$$\rightarrow \boxed{dx(t) = \left[h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right] dt + g(x,t)\,dw\sqrt{dt}} \quad (11.15)$$

... SDG in Stratonovich-Interpretation!

Beachte: $g, \frac{\partial g}{\partial x}$ bei x,t! $\rightarrow$ in Ito-Form!

- Kramers-Moyal-Koeffizienten: „Signaturen einer SDG"!

$$D^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left\langle [\underbrace{x(t+\tau) - x}_{dx}]^n \right\rangle \quad (11.16)$$

(i) Ito-SDG: lese direkt von (11.12) ab

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned}} \tag{11.17}$$

(ii) Stratonovich-SDG: aus (11.15):

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned}} \tag{11.18}$$

· mehrdimensionale SDG: $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ z.B. viele Teilchen

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x}_i = h_i(\underline{x},t) + g_{ij}(\underline{x},t)\,\Gamma_j(t) \\ &\text{mit } \langle \Gamma_j(t) \rangle = 0 \qquad \langle \Gamma_i(t)\,\Gamma_j(t') \rangle = \delta_{ij}\,\delta(t-t') \end{aligned}} \tag{11.19}$$

(i) Ito-Interpretation:

$$\boxed{\begin{aligned} &dx_i(t) = h_i(\underline{x},t)\,dt + g_{ij}(\underline{x},t)\,dw_j\sqrt{dt} \\ &\text{mit} \quad \langle dw_i \rangle = 0 \\ &\qquad\quad \langle dw_i\, dw_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\rightarrow \quad D_i^{(1)}(\underline{x},t) = h_i(\underline{x},t) \\ &\qquad\quad D_{ij}^{(2)}(\underline{x},t) = \frac{1}{2} g_{ik}(\underline{x},t)\, g_{jk}(\underline{x},t) \end{aligned}} \tag{11.20}$$

(ii) Stratonovich-Interpretation

$$dx_i(t) = h_i(\underline{x},t)\,dt + g_{ij}(\underline{x},t) \circ dw_j\sqrt{dt}$$

$$dx_i(t) = D_i^{(1)}(\underline{x},t)\,dt + g_{ij}(\underline{x},t)\,dw_j\sqrt{dt}$$

mit $\langle dw_i\rangle = 0$, $\langle dw_i\, dw_j\rangle = \delta_{ij}$

$$D_i^{(1)}(\underline{x},t) = h_i(\underline{x},t) + \frac{1}{2} g_{kj}(\underline{x},t)\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\underline{x},t) \qquad (11.21)$$

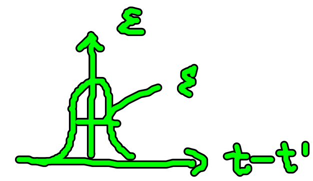
$$D_{ij}^{(2)}(\underline{x},t) = \frac{1}{2} g_{ik}(\underline{x},t)\, g_{jk}(\underline{x},t)$$

Anwendung der verschiedenen Interpretationen:

(i) physikalische Prozesse mit Korrelationen auf kleiner Zeitskala ε:

also: idealisiert $\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = \delta(t-t')$

Realität: $\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = \delta_\varepsilon(t-t')$



→ Stratonovich-Interpretation

Warum? vgl. Berechnung von $D^{(1)}$ in Kap 10.3

(1) $$A = \left\langle \int_t^{t+\tau}\int_t^{t'} \Gamma(t')\Gamma(t'')\,dt''\,dt'\right\rangle \underset{\text{mit } \langle\Gamma(t')\Gamma(t'')\rangle = \delta_\varepsilon(t'-t'')}{=} \frac{\tau}{2}$$

(2) über Wiener Prozess (Erinnere: $dW = \Gamma(t)\,dt$)

$$A_S = \left\langle \int_t^{t+\tau}\underbrace{\int_t^{t'} dW(t'')}\, dW(t')\right\rangle$$

$$= \left\langle\int_t^{t+\tau}\overbrace{[W(t')-W(t)]}\,dW(t')\right\rangle \underset{\text{Stratonovich (11.9)}}{=} \left\langle \frac{W^2(t+\tau)-W^2(t)}{2} - W(t)[W(t+\tau)-W(t)]\right\rangle$$

(11.4): $\langle W(t+\tau)\,W(t)\rangle = t$

$$\Rightarrow \langle W^2(t+\tau)\rangle = \langle W(t+\tau)\,W(t+\tau)\rangle = t+\tau$$

$$\langle W^2(t)\rangle = t$$

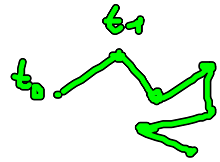
$$\langle W(t)\, W(t+\tau)\rangle = t$$
$$\langle W^2(t)\rangle = t$$

$$\Rightarrow \quad A_S = \frac{1}{2}\left(t+\tau-t\right) - t + t = \frac{\tau}{2}$$

aber $A_I = 0$!

(ii) Biologie: oft diskrete Prozesse $\rightarrow$ Ito-Interpretation

(iii) Analyse von Zeitreihen:

Bsp: Zufallsweg eines Mikroorganismus: 

$x(t_i)$

Bem.: Die Wahl zwischen Ito & Stratonovich spielt nur eine Rolle wenn Rauschterm ortsabhängig!

$$\dot{x} = h(x,t) + \underline{g(x,t)}\,\Gamma(t)$$

• Beispiel:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot{x}_i + \gamma_{ij}\, x_j = \Gamma_i(t) & i = 1,\dots,N \\ \langle \Gamma_i(t)\rangle = 0 \quad \langle \Gamma_i(t)\,\Gamma_j(t')\rangle = q_{ij}\,\delta(t-t') \,, & q_{ij} = q_{ji} \end{array}} \qquad (11.22)$$

... Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Bem: (1) lineare SDG

(2) q_{ij} ... Stärke des Rauschens

(3) $N=1$, $x=v$ ... 1D-Brownsche Bewegung mit Trägheit

(4) $\gamma_{ij} = 0$ ... Wiener-Prozess!

Lösungen: ... s. H. Risken, The Fokker-Planck-Equation (Springer)