

X/2 Time-convolutionless

Projektion Operator Methode

Es wäre schön, wenn die Faltung in der Nakajima-Zwanzig-Gl. weggelassen werden könnte.

Können wir $\rho(\underline{s})$ durch $\rho(\underline{t})$ ersetzen?

$$\partial_t \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} H_{SB}(t) \rho(t)$$

können wir formal lösen

$$\underline{\rho}(s) = G(t, s) (P+Q) \rho(t) \text{ mit}$$

$$G(t, s) = T \rightarrow \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_s^t ds' H_{SB}(t') \right)$$

↳ Propagator

Wir setzen das in (siehe XI.1)

$$Q \rho(t) = G(t, t_0) Q \rho(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds G(t, s) Q H_{SB}(s) \underline{\rho}(s)$$

wieder ein:

$$Q \rho(t) = G(t, t_0) Q \rho(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds G(t, s) Q H_{SB}(s) P G(t, s) \times (P+Q) \rho(t)$$

Abkürzung:

$$\Sigma(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds G(t, s) Q H_{SB}(t) P G(t, s)$$

$$\Rightarrow Q_p(t) = g(t, t_0) Q_p(t_0) + \Sigma(t) P_p(t) + \Sigma(t) Q_p(t)$$

Wieder Ziel $Q_p(t)$ zu eliminieren also
entsprechend auflösen:

$$(1 - \Sigma(t)) Q_p(t) = g(t, t_0) Q_p(t_0) + \Sigma(t) P_p(t) / (1 - \Sigma(t))$$

$$Q_p(t) = (1 - \Sigma(t))^{-1} g(t, t_0) Q_p(t_0) \quad (b)$$

$$+ (1 - \Sigma(t))^{-1} \Sigma(t) P_p(t) \quad (a)$$

Erinnerung:

$$(i) \frac{d}{dt} P_p(t) = -\frac{i}{h} P_{HSB}(t) P_p(t) - \frac{i}{h} P_{HSB}(t) Q_p(t)$$

$$= -\frac{i}{h} P_{HSB}(t) (1 - \Sigma(t))^{-1} (1 - \Sigma(t)) P_p(t) \text{ ersetzen}$$

$$-\frac{i}{h} P_{HSB}(t) Q_p(t)$$

Dann haben wir

$$(a) \mathcal{X}(t) = -\frac{i}{h} P_{HSB}(t) (1 - \Sigma(t))^{-1} P$$

$$(b) \mathcal{Y}(t) = -\frac{i}{h} P_{HSB}(t) (1 - \Sigma(t))^{-1} g(t, t_0) Q$$

Achtung: $(1 - \Sigma(t))^{-1}$ muss nicht immer existieren!

$$\frac{d}{dt} P_{\beta}(t) = \mathcal{X}(t) P_{\beta}(t) + \underbrace{\mathcal{Y}(t) Q_{\beta}(t)}_{\text{Inhomogenität}}$$

beschreibt wieder Abweichungen im Bach vom GG am Anfang.

- (i) Beschreibt die Dynamik und ist zeitlokal
- (ii) keine Faltung!
- (iii) Die Gedächtniseffekte verstecken sich in $\mathcal{X}(t)$
- (iv) Für die konkrete Rechnung muss $\mathcal{X}(t)$ bestimmt werden. Leider ist das nicht so einfach! Auch $\mathcal{Y}(t)$, es sei denn $Q_{\beta}(t_0) = 0$, was meist angenommen wird.

$K(t)$ in Ordnungen der WW entwickeln:
 Schauen wir uns die Bestandteile an:
 Zunächst $(1 - \mathcal{Z}(t))^{-1}$ in Ordnungen von HSB.

entwickeln:

$$(1 - \Sigma(t))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [\Sigma(t)]^n \quad (\text{Geometrische Reihe / Neumann Reihe})$$

Dann hat $\mathcal{K}(t)$ die Form:

$$\mathcal{K}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{\hbar} P H_{SB} [\Sigma(t)]^n P = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n(t)$$

n-te Ordnung in der Koppelung

Weiterhin wird $\Sigma(t)$ in Ord. von H_{SB} entwickelt:

$$\Sigma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Sigma_n(t)$$

Beispiele

$$\mathcal{K}_1(t) = \frac{-i}{\hbar} P H_{SB}(t) P$$

$$\mathcal{K}_2(t) = \frac{-i}{\hbar} P H_{SB}(t) \Sigma_1(t) P$$

$$\mathcal{K}_3(t) = \frac{-i}{\hbar} P H_{SB}(t) ([\Sigma_1(t)]^2 + \Sigma_2(t)) P$$

$$\mathcal{K}_4(t) = \frac{-i}{\hbar} P H_{SB}(t) ([\Sigma_1(t)]^3 + \Sigma_1(t)\Sigma_2(t) + \Sigma_2(t)\Sigma_1(t) + \Sigma_3(t)) P$$

Das ergibt dann wenn in Σ auch G und G entwickelt werden: (iA)

$$\mathcal{K}_1(t) = \frac{-i}{\hbar} P H_{SB}(t) P = 0 \quad (\text{bei linearer Koppelung / harmonisches Bad})$$

$$\Sigma_1(t) = \int_{t_0}^t \left(\frac{-i}{\hbar}\right) G H_{SB}(t) P$$

$$\mathcal{K}_2(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \left(\frac{-i}{\hbar}\right) P H_{SB}(t) H_{SB}(t_1) P$$

Bemerkung:

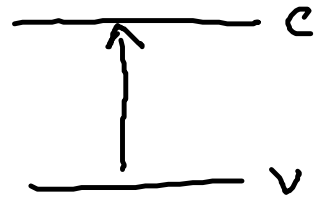
Bei der TCL Theorie ist der Zeitpunkt t_0 ausgezeichnet. Am besten geeignet für Fälle bei denen das System zum Zeitpunkt t_0 gestört wird, z.B. optische Anregung.

Beispiel

Wir regen das System optisch mit einem δ -Puls an.

Bsp: für Quantenpunkt Polarisation sieht opt. Feld dann wie folgt:

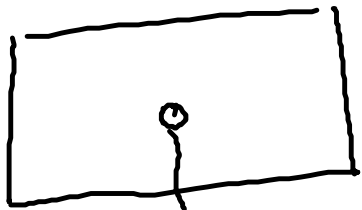
(2-Niveaus des QD)



$\text{tr}(a_v^\dagger a_c P_{\beta}(t_0)) \neq 0$ als Anfangsbedingung vor.

Unsere TCL Gleichung hat dann die Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{tr}(a_v^\dagger a_c P_{\beta}(t)) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_1}^t ds \text{tr}(a_v^\dagger a_c P H_{SB}(t) H_{SB}(s) P_{\beta}(t))$$



Eingespart im Volumen HL

Die Phonon-WW hat die lineare Form:

$$H_{SB} = \sum_q D_{q,cc} \underbrace{(b_q^\dagger + b_q)}_{\text{phononen}} \underbrace{a_c^\dagger a_c}_{\text{oberes Niveau des QP.}}$$

Im WW-Bild hat H die Form:

$$H_{SB} = \sum_q D_{q,cc} \left(b_{-q}^+ e^{i\omega_q t} + b_q e^{-i\omega_q t} \right) a c^\dagger a c$$

Bemerkung: Dass $a c^\dagger a c$ nur auftritt ist eine Folge der Annahme, dass vor der Anregung $a^\dagger a$ vorliegt!
 Konsequente Anwendung der Born-Oppenheimer Näherung!

Werten wir $\text{tr} (a^\dagger a c P H_{SB}(t) H_{SB}(s) P \rho(t))$ aus.

$$= \text{tr}_S (\text{tr}_B (a^\dagger a c \rho_B \text{tr}_B (H_{SB}(t) H_{SB}(s) P \rho(t)))$$

$\text{tr}_B(\rho_B) = 1$

Bemerkung: $\text{tr}(AH-B) = \text{tr}(AHB) - \text{tr}(ABH)$
 $= \text{tr}(AHB) - \text{tr}(HAB)$
 $= -\text{tr}((H-A)B)$

$$= ((H_{SB}(s) H_{SB}(t) a^\dagger a c) P \rho(t))$$

$$\begin{aligned} H_{SB} A a^\dagger a c &= \sum_q D_{q,cc} \left(b_{-q}^+ e^{i\omega_q t} + b_q e^{-i\omega_q t} \right) A \underbrace{a c^\dagger a c a^\dagger a c}_{=0} \\ \downarrow \\ \text{Phonon Operator} &= \sum_q D_{q,cc} \underbrace{a^\dagger a c a^\dagger a c}_{-a^\dagger a c} A \left(b_{-q}^+ e^{i\omega_q t} + b_q e^{-i\omega_q t} \right) \\ &= \sum_q D_{q,cc} a^\dagger a c A \left(\quad \quad \quad \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & \text{tr} (a^\dagger a c \mathcal{P} (H_{SB-}(t) H_{SB-}(s) \mathcal{P}_\rho(t))) \\ &= \sum_{qq'} D_{q,cc} D_{q',cc} \text{tr}_B (\text{tr}_S (a^\dagger a c (b_q^+ e^{i\omega_q t} + b_q e^{-i\omega_q t})) \\ & \quad (b_{-q'}^+ e^{i\omega_{q'} s} + b_{q'} e^{-i\omega_{q'} s}) \rho_B \otimes \text{tr}_B(\rho)) \\ &= \sum_{qq'} D_{q,cc} D_{q',cc} \frac{\text{tr}_B \left((b_q^+ e^{i\omega_q t} + b_q e^{-i\omega_q t}) (b_{-q'}^+ e^{i\omega_{q'} s} + b_{q'} e^{-i\omega_{q'} s}) \rho_B \right)}{\text{tr} (a^\dagger a c \mathcal{P}_\rho)} \end{aligned}$$

Bemerkung: $\text{tr} (b_q^+ b_{q'}^+ \rho_B) = \text{tr} (b_{q'} b_q \rho_B) = 0$

$$\text{tr} (b_q^+ b_q \rho_B) = n_q \delta_{qq'}$$

↑
Bose-Verteilung

$$= \delta_{qq'} (n_q e^{i\omega_q(t-s)} + (1+n_q) e^{-i\omega_q(t-s)})$$

Also:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{tr} (a^\dagger a c \mathcal{P}_\rho(t)) = \frac{-\Lambda}{\kappa} \sum_q |D_q|^2 \int_{t_0}^t ds (n_q e^{i\omega_q(t-s)} + (1+n_q) e^{-i\omega_q(t-s)})$$

$$\text{tr} (a^\dagger a c \mathcal{P}_\rho(t))$$

Bemerkung

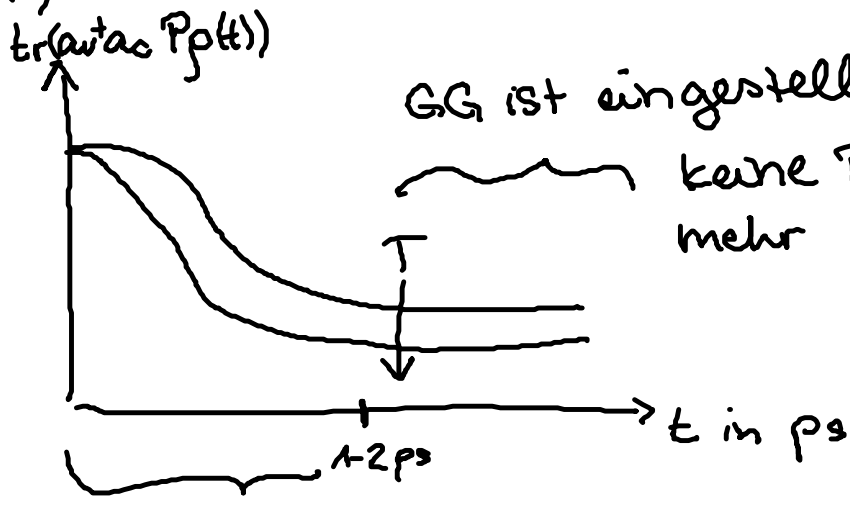
(a) Integration liefert:

$$\text{tr}(\text{av}^{\dagger} \text{ac} P_{\rho}(t)) = \exp\left(-\frac{\Lambda}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q}} |D_{\mathbf{q}}|^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} (n_{\mathbf{q}} e^{i\omega_{\mathbf{q}}(t-s)} + (1+n_{\mathbf{q}}) e^{-i\omega_{\mathbf{q}}(t-s)}) ds db_1\right)$$

Das ist aber gerade die exakte Lösung des Independent-Boson-Modells.

Warum? TCL entspricht einer Kumulantent., in 4. Ordnung Kumulanten des harm. Bades verschwindet aufgrund des Wick-Theorems für die Kopplung! Also TCL leicht zu lösen und niedriger Ordnung exakt!

b) Numerische Auswertung des Ergebnisses



für akustische Phononen eines GaAs/InAs QD

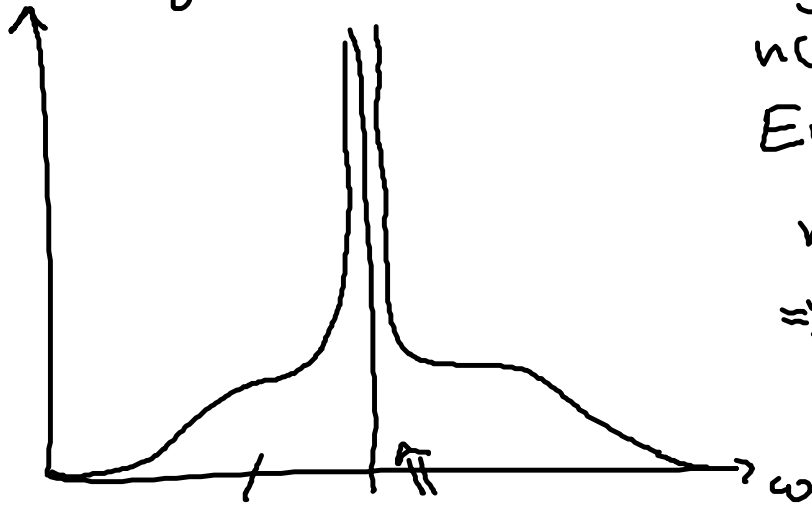
• Relaxation erfolgt schneller, je stärker die WW

• Hier stellt sich neues GG zwischen Elektronen und Phononen

ein.

Fourier transformiertes Spektrum

$\text{tr}(\omega) P_f(\omega)$



Phononseiten-
banden

Symmetrie wird durch
 $n(T)$ zu $(1+n(T))$ bestimmt
Ergo: Bei hohen Temperaturen
 $n(T) \approx (1+n(T))$
 \Rightarrow praktisch symmetrisch!