

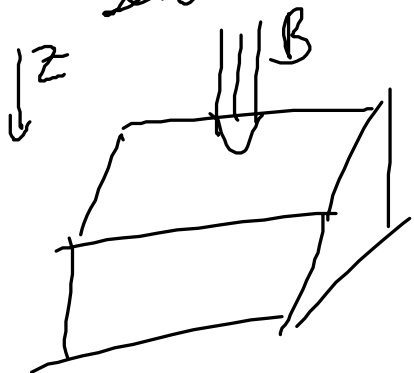
### XIII. Halbleiter in Magnetfeld (Magnetooptik)

Wir hatten den Fall von Nanostrukturen

bei dem z.B. durch Kombination verschiedener Materialien die Elektronen irgendwie eingespart wurden.

z.B. Quantenwellen,

Jetzt andere Idee:



konstantes Magnetfeld

Aus der klassischen Physik ist bekannt Elektronen bewegen sich senkrecht zum Magnetfeld. Nach Lenz'scher Regel sollte sich ein Bohrs ausbilden.

Also Ansatz

$$\underline{B} = B \underline{e}_z$$

Das zugehörige Vektorpotential hat die Form

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{2} \underline{B} \times \underline{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (-e_x B_y + e_y B_x)$$

übrigens

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -B_y \\ +B_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +B + B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

Das setzen wir in der Hamiltonfunktion ein.

Zur Erinnerung

$$A_0 = \frac{(\rho + e \underline{A})^2}{2m}$$

Setzen wir  $m \underline{A}$  ein!

In Ortsdarstellung

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \underbrace{\left( i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{eB}{2\hbar} y \right)^2 + \left( i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eB}{2\hbar} x \right)^2}_{x-y \text{ Ebene}} + \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^2}_{z\text{-Richtung}} \right)$$

Wir sehen das Problem ist separierbar!

Im Folgenden betrachten wir nur die  $x-y$  Ebene!

Wir führen die charakteristische magnetische Länge  $l^2 = \frac{\hbar}{eB}$

$$H_{x,y} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2l^2} \right)^2 + \left( i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2l^2} \right)^2 \right]$$

Wir skalieren die Koordinaten mit charakteristischer magnetischer Länge

$\underline{r} = l \underline{\rho}$ , damit wird die Gleichung unabhängig vom Magnetfeld.

Außerdem führen wir die cyclotron Frequenz ein

$$\omega_c = \frac{\hbar}{m l^2} = \frac{eB}{m}$$

$$H_{x,y} = \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial \rho_x} + \frac{1}{2} \rho_y \right)^2 + \left( i \frac{\partial}{\partial \rho_y} - \frac{1}{2} \rho_x \right)^2 \right]$$

$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \rho_x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho_y^2} - \frac{1}{4} (\rho_x^2 + \rho_y^2) + i \frac{\partial}{\partial \rho_x} \rho_y - i \frac{\partial}{\partial \rho_y} \rho_x \right]$$

$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left( -\sqrt{B}^2 + \frac{1}{4} \rho^2 + \frac{2z}{\hbar} \right)$$

Erinnerung an harmonischen Oszillator!

Also Erzeuger und Vernichter konstruieren.

Koordinaten auf komplexe Ebene abbilden:

$$\alpha = \frac{p_x - i p_y}{2}, \quad \beta = \frac{z}{2 p_x} - i \frac{z}{2 p_y}$$

$$\alpha^\dagger = \frac{p_x + i p_y}{2}, \quad \beta^\dagger = -\frac{z}{2 p_x} - i \frac{z}{2 p_y}$$

Bei harmonischen Oszillatoren werden Orts ( $\alpha$ ) und Impulsoperatoren ( $\beta$ ) addiert für Erzeuger und Vernichter.

Erzeuger und Vernichter für inter-Landaulevel

$$\| a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta) \quad \text{und} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^\dagger + \beta^\dagger) \|$$

Man kann leicht zeigen:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \text{und} \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

Ähnlich kann man die intra-Landaulevel Operatoren definieren:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^\dagger - \beta^\dagger) \quad \text{und} \quad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta)$$

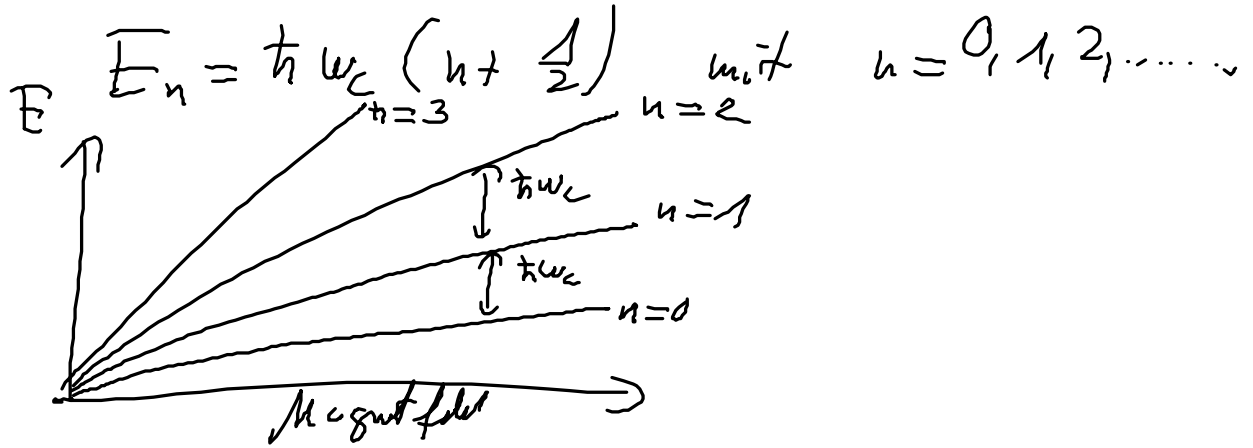
(auch Bosonisch)

Man kann zeigen, dass

$$\| H_{xy} = \hbar \omega_c \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \| \Leftrightarrow \text{Also Energie wird durch die intra Landau Level Operatoren bestimmt.}$$

$$\| L_z = a^\dagger a - b^\dagger b \|$$

Also Drehimpuls in z-Richtung ist Differenz zw. den Besetzungszahloperatoren der inter und intra Landaulevel



Analog zum harm. Oszillator kann man die Eigenzustände schreiben als

$$\phi_{nn'} = |n\rangle |n'\rangle$$

mit  $n', n = 0, 1, 2, 3, \dots$   
↑ intrin    ↑ inter

Grundzustand gilt

$$\begin{cases} a \phi_{00} = a |0\rangle |0\rangle = 0 \\ b \phi_{00} = |0\rangle b |0\rangle = 0 \end{cases}$$

Definition für  $a$  und  $b$  einsetzen  $\Rightarrow$  Bestimmungsgr. für

Grundzustand:

$$\phi_{00}(p_x, p_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2}{4}\right)$$

Interessant ist ferner die Werte für  $L_z$  auf die Zustände

$$L_z \phi_{nn'} = (a^\dagger a - b^\dagger b) \phi_{nn'} = (n - n') \phi_{nn'} = m \phi_{nn'} \text{ mit } m = n - n'$$

$$\phi_{nn'}(p_x, p_y) = \frac{a^{\dagger n} b^{n'}}{\sqrt{n! n'}} \phi_{00}(p_x, p_y)$$

Bemerkung:

Die Landau Level sind unendlich entartet, es gibt immer nur ein Zustand im Landaulevel für jeden Wert von  $m$ .

Die Landau Level sind die Basis für die Erklärung des Quanten-Hall Effekts.

# Als Beispiel 2D Magnetfeld Exziton

Wir setzen uns jetzt ein Elektron-Loch Paar  
in Magnetfeld an:



$$\Psi(r_e, r_h) = \Psi_{e,c}^+(r_e) \Psi_{e,v}(r_h) / \phi_0 \quad \uparrow \text{Grundzustand}$$

Schrödingergl.

$$H^{mx} \Psi(r_e, r_h) = E \Psi(r_e, r_h)$$

( $mx$  ist Magnetfeld Exziton  
Hamiltonian)

Ham Op hat die Form

$$H^{mx} = \sum_{i=e,h} \frac{1}{2m_i} \left( p_i - \frac{e_i}{2} \underline{B} \times \underline{r}_i \right)^2 - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 |\underline{r}_e - \underline{r}_h|}$$

mit  $e_e = -e$  und  $e_h = e$

Jetzt wird eine kanonische Transformation

$$U(\underline{r}) = \exp\left(-i \frac{e}{2} \underline{B} \cdot (\underline{R} \times \underline{r})\right) \Psi(r_e, r_h)$$

Wobei  $\underline{r}$  und  $\underline{R}$  relativ und Schwerpunkt's koordinat.

$$H_r^{mx} U(\underline{r}) = E U(\underline{r})$$

mit

$$H_r^{mx} = \sum_{i=e,h} \frac{1}{2m_i} \left( p_i - \frac{e_i}{2} \underline{B} \times \frac{\underline{r}_i}{r} \right)^2 - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r}$$

Wir haben also nur noch die Relativbewegung zu lösen!  
 Wir skalieren dies mit der Längenskala  $l$ :

$$H_r^{mx} = E_0 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\hbar \omega_c}{2 E_0} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e_i}{e} p_x \right)^2 + \left( i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e_i}{e} p_y \right)^2 \right] - \frac{2 \hbar^2}{g}$$

$\lambda = \frac{a_0^2}{e^2} \leftarrow$  Bohrradius des Excitons

Hier ist  $E_0$  3d Exciton Rydberg Energie.

$\lambda$  gibt an ob die Coulomb Bindungsenergie oder der Effekt des Magnetfelds überwiegt.

Wir entwickeln die Wellenfkt in Landau Zustände

$$U_\alpha = \sum_n c_{\alpha n} \phi_{nn} = \sum_n c_{\alpha n} |n\rangle \langle n|$$

Landau Level

in relat. v. Koordinate

$n = n'$  s-artige  
 Wellenfkt nur  
 diese tragen bei

Stationäre Schröd.

$$\sum_n \left[ 2\lambda \left( n + \frac{1}{2} \right) \delta_{nn'} - V_{nn'} \right] c_{\alpha n} = E_\alpha c_{\alpha n'}$$

Man muss die Coulomb bzgl der Landau Eigenzustände entwickeln! (Lange Rechnung s. Huz/Red)

$$V_k = \frac{4\pi \hbar^2}{k}$$

$$V_{n'n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk k V_k |J_{n'n}|^2$$

mit  $J_{n'n} = \sqrt{\frac{n!}{n'!}} \left( \frac{k}{\sqrt{2}} \right)^{n+n'} e^{-k^2/4} \sim \binom{n+n'}{n} (k^2/4)$

$$N' = \sup \langle n', n \rangle$$

$$N = \inf \langle n', n \rangle$$

Analog zur Exzitation messen:

Optische Feld

$$\left[ \underbrace{H_r^{m \times}(\mathbf{k}) + E_g - \frac{1}{2}(\omega + i\delta)}_{\text{homogener Anteil}} \right] P_{vc}(\mathbf{k}) = \underbrace{d_{vc} F \delta(\mathbf{k}) L^2}_{\text{Treiber Term}}$$

$$P_{vc}(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} U_{\alpha}(\mathbf{k})$$

Lösung der Gl.

$$c_{\alpha} = \frac{d_{vc} U_{\alpha}(r=0) L^2 F}{E_0 E_{\alpha} + E_g - \frac{1}{2}(\omega + i\delta)}$$

Skizze

opt. Suszeptibilität

$$\chi(\omega) = \frac{\tilde{\rho}(\omega)}{\tilde{\Sigma}(\omega)} = \sum_{\alpha} \frac{|d_{vc}^2| |U_{\alpha}(r=0)|^2}{E_0 E_{\alpha} + E_g - \frac{1}{2}(\omega + i\delta)}$$

$$U_{\alpha}(r=0) = \sum_{n, n'} \langle r=0 | n \rangle |n'\rangle \langle n' | \langle n | \alpha \rangle$$

Vollständigheit der linken Neben

Für  $\phi_{n, n'}(\mathbf{k})$  verschieden für  $r \rightarrow \infty$  wie  $r^{|n-n'|}$   
 daher trägt nur  $n=n'$  bei.

$$\chi(\omega) \propto \frac{1}{2\pi} \sum_{n} \frac{|\sum_{n'} \langle \alpha | n \rangle |n'\rangle|^2}{E_{\alpha} + (E_g - \frac{1}{2}(\omega + i\delta)) / F_0}$$

hatte  
Verhalten von  
Coulomb-Wechselwirkung im Magnetfeld

Abstrakt

