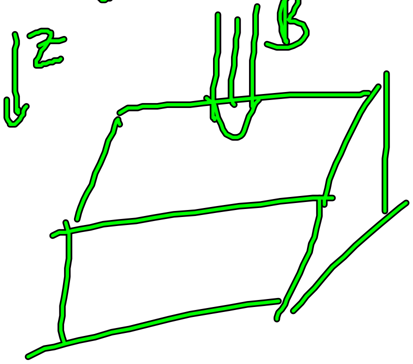
XIII. Halbleiter im Magnetfeld (Magnetooptik)

Wir hatten den Fall von Nanostrukturen bei denen z.B. durch Kombination verschiedener Materialien die Elektronen irgendwie eingesperrt wurden. z.B Quantenwell.

Jetzt andere Idee:



konstantes Magnetfeld

Aus der klassischen Physik ist bekannt Elektronen bewegen sich senkrecht zum Magnet

Nach Lenz'schen Regel sollte sich eine Bahn ausbilden.

Also Ansatz

$$\underline{B} = B e_z$$

Das zugehörige Vektorpotential hat die Form

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{2}\,\underline{B} \times \underline{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\B_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\underline{e}_x B y + e_y B x\right)$$

Überprüfen

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-By\\+Bx\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\+B+B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}$$

Das setzen wir in den Hamilton Operator ein.

Zur Erinnerung

$$H_0 = \frac{(p+eA)^2}{2m}$$ setzen wir nun A ein!

In Ortsdarstellung

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\underbrace{\left(i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{eB}{2\hbar}y\right)^2+\left(i\frac{\partial}{\partial y}-\frac{eB}{2\hbar}x\right)^2}_{x-y\text{ Ebene}}+\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2}_{z-\text{Richtung}}\right)$$

Wir sehen das Problem ist separiert!

Im Folgenden betrachten wir nur die x-y Ebene!

Wir führen die charakteristische magnetische Länge $\ell^2 = \frac{\hbar}{eB}$

$$H_{xy} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{2\ell^2}\right)^2+\left(i\frac{\partial}{\partial y}-\frac{x}{2\ell^2}\right)^2\right]$$

Wir skalieren die Koordinaten mit charakteristischer Magnetischer Länge

$\underline{r} = \ell\,\underline{\rho}$, damit wird die Gleichung unabhängig vom Magnetfeld.

Außerdem führen wir die cyclotron Frequenz ein

$$\omega_c = \frac{\hbar}{m\ell^2} = \frac{eB}{m}$$

$$H_{xy} = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left[\left(i\frac{\partial}{\partial\rho_x}+\frac{1}{2}\rho_y\right)^2+\left(i\frac{\partial}{\partial\rho_y}-\frac{1}{2}\rho_x\right)^2\right]$$

$$= \frac{\hbar\omega_c}{2}\left[-\frac{\partial^2}{\partial\rho_x^2}-\frac{\partial^2}{\partial\rho_y^2}-\frac{1}{4}\underbrace{\left(\rho_x^2+\rho_y^2\right)}_{\rho^2}+\underbrace{i\frac{\partial}{\partial\rho_x}\rho_y-i\frac{\partial}{\partial\rho_y}\rho_x}_{\frac{L_z}{\hbar}}\right]$$

$$= \frac{\hbar\omega_c}{2}\left(\underbrace{-\nabla_\rho^2+\frac{1}{4}\rho^2}_{\text{Erinnerung an harmonischen Oszillator!}}+\frac{L_z}{\hbar}\right)$$

Also Erzeuger und Vernichter konstruieren.

Koordinaten auf komplexe Ebene abbilden:

$$\alpha = \frac{g_x - i g_y}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\partial}{\partial g_x} - i \frac{\partial}{\partial g_y}$$

$$\alpha^+ = \frac{g_x + i g_y}{2} \quad , \quad \beta^+ = -\frac{\partial}{\partial g_x} - i \frac{\partial}{\partial g_y}$$

Beim Harmonischen Oszillator werden Orts (α) und Impulsoperator (β) addiert für Erzeuger und Vernichter.

Erzeuger und Vernichter für <u>inter</u>-Landaulevel

$$\| \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta) \quad \text{und} \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^+ + \beta^+) \quad \|$$

Man kann leicht zeigen:

$$[a, a^+] = 1 \quad \text{und} \quad [a, a] = [a^+, a^+] = 0$$

Ähnlich kann man die <u>intra</u>-Landaulevel Operatoren definieren:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^+ - \beta^+) \quad \text{und} \quad b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta)$$

(auch Bosonisch)

Man kann zeigen, dass

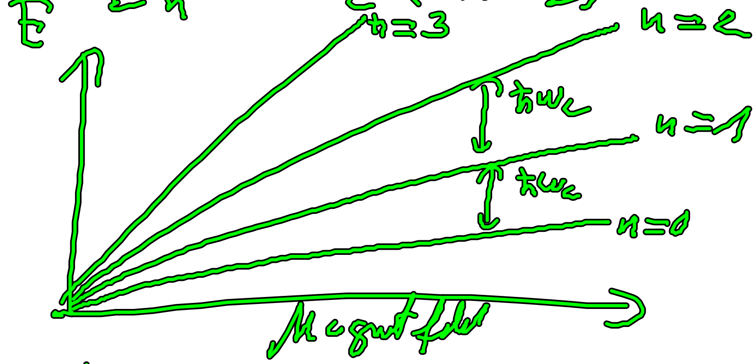
$$\| \quad H_{xy} = \hbar \omega_c \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) \quad \| \Leftarrow$$

Also Energie wird durch die intra Landau Operatoren bestimmt.

$$\| \quad \underbrace{L_z = a^+ a - b^+ b}_{} \quad \|$$

Also Drehimpuls in z-Richtung ist Differenz zw. den Besetzungszahloperatoren der inter und intra Landaulevels.

$$E_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$



Analog zum harm. Oszillator kann man die Eigenzustände schreiben als

$$\phi_{nn'} = |n\rangle |n'\rangle \qquad \text{mit } \underset{\text{intern}}{n'}, \underset{\text{inter}}{n} = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Grundzustand gilt

$$\begin{cases} a\,\phi_{00} = a|0\rangle|0\rangle = 0 \\ b\,\phi_{00} = |0\rangle\, b|0\rangle = 0 \end{cases}$$

Definition für a und b einsetzen $\Rightarrow$ Bestimmungsgl. für Grundzustand:

$$\phi_{00}(\rho_x, \rho_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{4}\right)$$

Interessant ist ferner die Werte für L_z auf die Zustände

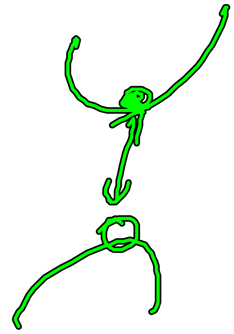
$$L_z\,\phi_{nn'} = (a^+a - b^+b)\,\phi_{nn'} = (n - n')\,\phi_{nn'} = m\,\phi_{nn'} \quad \text{mit } m = n - n'$$

$$\phi_{nn'}(\rho_x, \rho_y) = \frac{a^{+n}\, b^{+n'}}{\sqrt{n!\; n'!}}\, \phi_{00}(\rho_x, \rho_y)$$

<u>Bemerkung:</u> Die Landau Level sind unendlich entartet, es gibt immer nur ein Zustand im Landau level für jeden Wert von m.
Die Landau Level sind die Basis für die Erklärung des Quanten-Hall Effekts.

Als Beispiel 2D Magnetfeld Exzitonen

Wir schauen uns jetzt ein Elektron-Loch Paar im Magnetfeld an:



$$\Psi(r_e, r_h) = \Psi^\dagger_{e,c}(r_e)\,\Psi_{e,v}(r_h)\,|\phi_0\rangle$$

Grundzustand

Schrödingergl.

$$H^{mx}\,\Psi(\underline{r}_e, \underline{r}_h) = E\,\Psi(\underline{r}_e, \underline{r}_h)$$

(mx ist Magnetfeld Exziton Hamiltonian)

Ham Op hat die Form

$$H^{mx} = \sum_{i=e,h} \frac{1}{2m_i}\left(p_i - \frac{e_i}{2}\,\underline{B}\times\underline{r}_i\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,|\underline{r}_e - \underline{r}_h|}$$

mit $e_e = -e$ und $e_h = e$

Jetzt wird eine kanonische Transformation

$$U(\underline{r}) = \exp\left(-i\frac{e}{2}\,\underline{B}\cdot(\underline{B}\times\underline{r})\right)\Psi(r_e, r_h)$$

wobei $\underline{r}$ und $\underline{B}$ relativ und Schwerpunktskoordinaten.

$$H^{mx}_r\,U(\underline{r}) = E\,U(\underline{r})$$

mit

$$H^{mx}_r = \sum_{i=e,h} \frac{1}{2m_i}\left(p_i - \frac{e_i}{2}\,\underline{B}\times\underline{r}\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, r}$$

Wir haben also nur noch die Relativbewegung zu lösen!
Wir skalieren die mit der Länge l_1:

$$H_r^{mx} = E_0 \, 2 \sum_{i=e,h} \frac{\hbar \omega_c}{2E_0} \left[\left(i\frac{\partial}{\partial s_x} + \frac{e_i}{e_e} s_y\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial s_y} - \frac{e_i}{e_e} s_x\right)^2 \right] - \frac{2\lambda^{\frac{1}{2}}}{s}$$

$$\lambda = \frac{a_0^2}{e^2} \Leftarrow \text{Bohrradius des Excitons}$$

Hier ist E_0 3d Exciton Rydberg Energie.
λ gibt an ob die Coulomb Bindungsenergie oder der Effekt des Magnetfelds überwiegt.

Wir entwickeln die Wellenfkt in Landau Zuständen

$$U_\alpha = \sum_n c_{\alpha n} \phi_{nn} = \sum_n c_{\alpha n} \, |n\rangle |n\rangle$$

Landau Level in relativkoordinate

$n = n'$ s-artig Wellenfkt nur diese tragen bei

Stationäre Schrödinger

$$\sum_n \left[2\lambda\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\delta_{nn'} - V_{nn'} \right] c_{\alpha n} = E_\alpha c_{\alpha n'}$$

Man muss den Coulomb bzgl der Landau Eigenzustände entwickeln: (Lange Rechnung s. Haug Koch)

$$V_k = \frac{4\pi \lambda^{\frac{1}{2}}}{k}$$

$$V_{n'n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \, k \, V_k \, |J_{n'n}|^2$$

mit $J_{n'n} = \sqrt{\frac{N!}{N'!}} \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^{N'-N} e^{-k^2/4} L_N^{(N'-N)}(k^2/2)$

$N' = \sup(n', n)$

$N = \inf(n', n)$

Analog zum Exzitonen morgen:

$$\left[\underbrace{H_r^{mx}(k) + E_g - \hbar(\omega + i\delta)}_{\text{homogener Anteil}}\right] P_{vc}(k) = \underbrace{d_{vc}\, \overset{\text{Optisches Feld}}{F}\, \delta(k)\, L^2}_{\text{Treiber Term}}$$

$$P_{vc}(k) = \sum_\alpha c_\alpha U_\alpha(k)$$

Skizze

Lösung der Gl.

$$c_\alpha = \frac{d_{cv}\, U_\alpha(r=0)\, L^2 F}{E_0 E_\alpha + E_g - \hbar(\omega + i\delta)}$$

opt. Suszeptibilität

$$\chi(\omega) = \frac{P(\omega)}{E(\omega)} = \sum_\alpha \frac{|d_{cv}|^2\, |U_\alpha(r=0)|^2}{E_0 E_\alpha + E_g - \hbar(\omega + i\gamma)}$$

$$U_\alpha(r=0) = \underbrace{\sum_{nn'}}_{\text{Vollständigkeit der Landau Niveaus}} \langle r=0|n\rangle |n'\rangle \langle n'| \langle n|\alpha\rangle$$

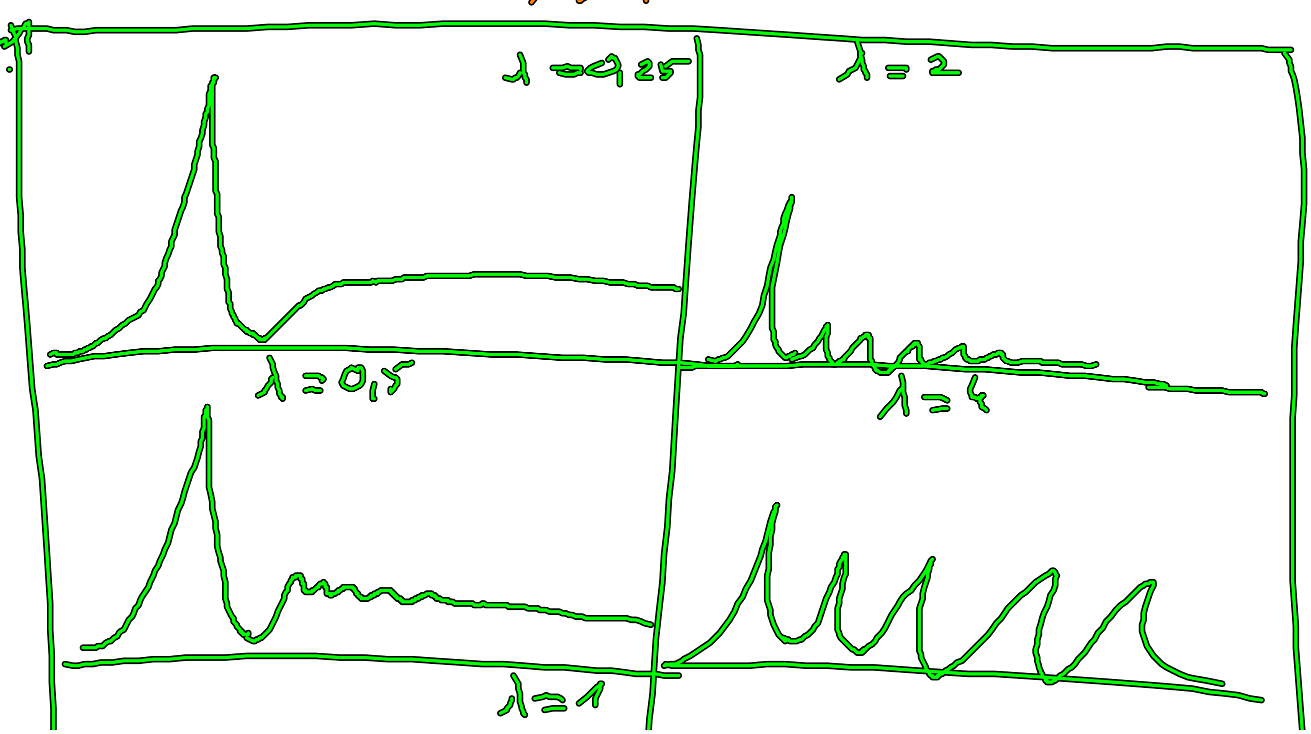
Für $\phi_{nn'}(k)$ verschwindet für $r \to 0$ wie $r^{|n-n'|}$

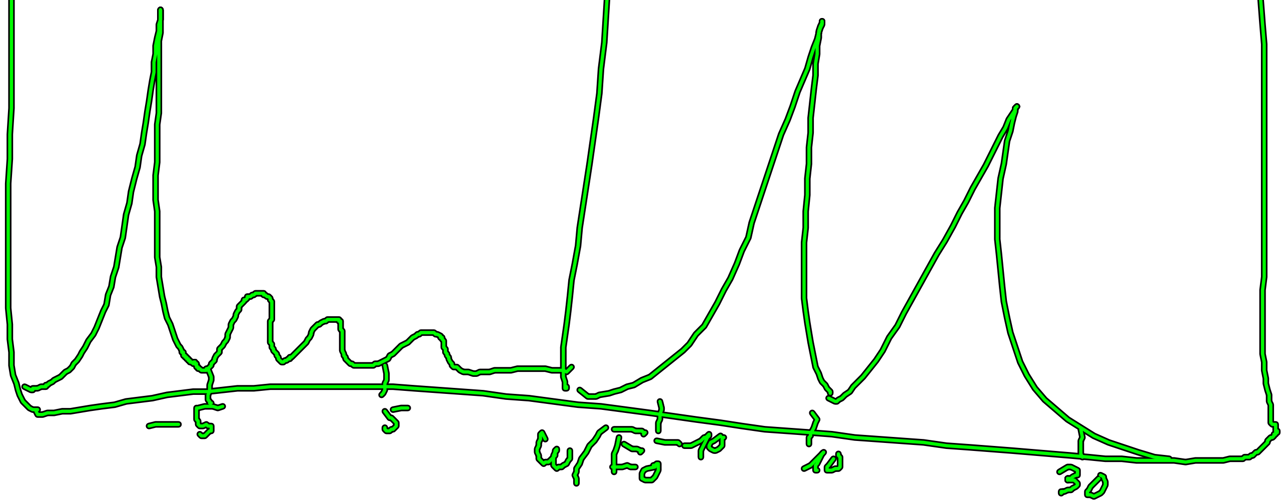
daher trägt nur $\underline{n = n'}$ bei:

$$\chi(\omega) \propto \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi}}_{\text{Verhältnis von Coulomb WW zum Magnetfeld}} \sum_\alpha \frac{\left|\sum_n |\langle\alpha|n\rangle\, |n\rangle\right|^2}{E_\alpha + (E_g - \hbar(\omega + i\gamma))/E_0}$$

~~Verhält~~

Absorbtion





-5
5
ω/E₀
10
10
30