

XI Quantenoptik: Photon-Statistik

Bisher semiklassischer Ansatz, d.h. Teilchen wurden quantenmechanisch behandelt und das Feld klassisch.

Ansatz ist ausreichend für die meisten Probleme der Festkörperphysik.

Ausnahmen: - spontane Emission (quantenmechanischer Effekt)

→ Quantenfluktuationen des elektromagnetischen Felds (Energie-Zeit Unschärfe)

- nicht-klassische Zustände des Lichts
z.B. bei einem Einzelphoton-Emitter

Geburtsstunde der Quantenoptik	1900	Planck's Strahlungsgesetz
	1905	Einstein photoelektrischer Effekt

Hamilton-Operator

$$H = \hbar\omega \left(\underbrace{b^\dagger b}_n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{in Analogie zum harmonischen Oszillator}$$

Photon $\hat{=}$ Quant des elektromagnetischen Felds mit der Energie $\hbar\omega$

$n = b^\dagger b$ Photonenzahl-Operator

b^\dagger, b Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Photonen

Schrödinger-Gleichung

$$H \phi_n = E_n \phi_n$$

Eigenenergien $E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Eigenfunktionen: $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n \phi_0$

beschreiben einen Zustand mit n Photonen \uparrow Vakuum-Zustand $|\phi_0\rangle$

Photonenzahl-Operator $\hat{n} \phi_n = n \phi_n$

$$b \phi_n = \sqrt{n} \phi_{n-1}$$

$$b^\dagger \phi_n = \sqrt{n+1} \phi_{n+1}$$

Allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$\phi(t) = \sum_n c_n \phi_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$$

Überlagerung der Eigenfunktionen ϕ_n mit den Koeffizienten c_n , wobei $|c_n|^2$ der Wahrscheinlichkeit entspricht, bei einer Messung n Photonen zu finden

Charakterisierung von Strahlungsfeld-Zuständen

I Fockzustand ϕ_n (Besetzungszahl-Zustand)

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n \phi_0$$

entsteht z.B. bei spontaner Emission.

Nicht-klassisches Licht

Licht-Zustände charakterisiert durch mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle = \bar{n}$ und Varianz (Quadrat der Standardabweichung)

$$\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2$$

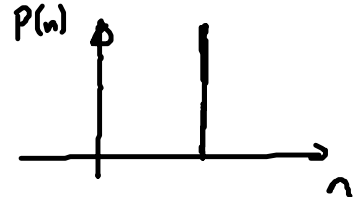
Fockzustand:

$$\bar{n} = (\phi_n, \underline{n} \phi_n) = n (\phi_n, \phi_n) = n$$

$$\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2 = (\phi_n, \underline{n}^2 \phi_n) - n^2 = n^2 - n^2 = 0$$

d.h. im Fockzustand ist die Photonzahl schärf
gegeben. Es liegen genau n Photonen vor.

Die Schwankung um den Mittelwert ist Null.



II Kohärenter Zustand (Glauber Zustand)

Beispiel: Laserlicht (konstante Phase, Amplitude und Frequenz)

→ stabilstes klassisches Licht

Eine allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung kann durch Überlagerung von Photonenzahl-Zuständen (Fock-Zuständen) ϕ_n aufgebaut werden.

Glauber Zustand

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\phi_n\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle \end{aligned}$$

Diese Zustände sind so definiert, dass die Heisenberg Unschärfe minimal ist, d.h.

$$\Delta p \Delta q = \frac{\hbar}{2}$$

Falls die Minimierung der Unschärfe von einer Größe auf Kosten der anderen geht: squeezed coherent states
(gequetschte Zustände)

Glauber-Zustände sind

Eigenzustände des Vernichtungsoperators, d.h.

$$b|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

Explizite Form von $|\alpha\rangle$ folgt damit direkt:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\phi_n\rangle \langle \phi_n | \alpha \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\phi_n\rangle \langle 0 | \alpha \rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \\ \langle \phi_n | &= \langle 0 | \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \end{aligned}$$

Normierung: $\langle \alpha | \alpha \rangle \stackrel{!}{=} 1 = |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 \underbrace{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}_{e^{|\alpha|^2}}$

$$\Rightarrow |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}$$

Damit folgt:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle$$

Für Glauber-Zustände gilt

$$\langle n \rangle = \bar{n} = (\phi_\alpha, \overset{\curvearrowright}{b^\dagger} \overset{\curvearrowright}{b} \phi_\alpha) = \alpha^\dagger \alpha = |\alpha|^2$$

$$\begin{aligned} \Delta n^2 &= \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2 = (\phi_\alpha, \underbrace{(b^\dagger b)^2}_{\substack{b^\dagger b b^\dagger b \\ \underbrace{\quad}_{b^\dagger b + 1}}}) \phi_\alpha) - |\alpha|^4 \\ &= (\phi_\alpha, b^\dagger b^\dagger b b + b^\dagger b, \phi_\alpha) - |\alpha|^4 \\ &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4 = |\alpha|^2 = \bar{n} \end{aligned}$$

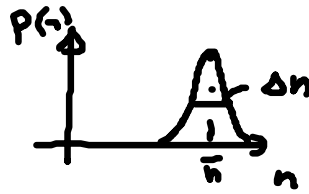
Wahrscheinlichkeit n Photonen bei kohärentem Licht zu messen

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

Poisson-Verteilung

mit $\langle n \rangle = \bar{n}$ als mittlere Photonanzahl

und mit der Breite $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$ (Standardabweichung)



III Thermischer Zustand

Beispiel: Sonnenlicht

Thermisches Licht lässt sich nicht über einen reinen Zustand definieren. Der Erwartungswert wird über den statistischen Operator definiert

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} \quad \text{wobei} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

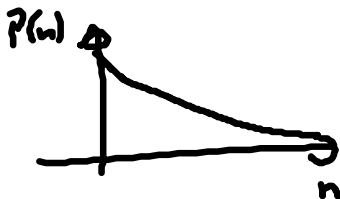


Zustandssumme

Mittlere Photonanzahl $\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$ entspricht

der Bose-Einstein Verteilung.

$$\Delta n^2 = \bar{n} + 2\bar{n}^2 > \bar{n} \quad \text{bei kohärentem Licht (Poisson-Statistik)}$$



Bose-Einstein

Photon-Statistik

- Glauber Zustand (kohärenter Zustand)

Laserlicht

Poisson-Verteilung mit Breite \sqrt{n}

Photonen treten unkorreliert bzw. zufällig auf.

|| | | | | Detektor

- Thermisches Licht

Sonnenlicht

Super-Poisson-Statistik mit Breite $> \sqrt{n}$

Photonen treten "geklumpt" auf
(bunching)

|||| ||| | Detektor

- Nicht-klassisches Licht

Fock-Zustand (Einzelphoton-Emitter)

Sub-Poisson-Statistik mit $< \sqrt{n}$

Photonen treten vereinzelt auf (anti-bunching)

| | | Detektor

Photonenzahl-Verteilung

